工业和信息化“十三五”规划教材

线性代数
习题全解与学习指导

濮燕敏 殷俊锋 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

VISIT…

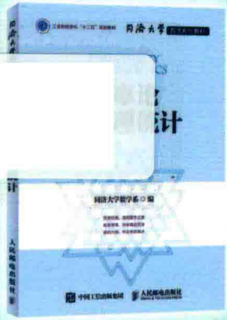
LANZAROTE Caliente.com

数学系列教材・书目











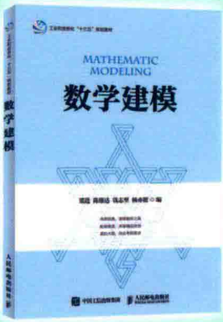












人邮教育
www.ryjiaoyu.com

教材服务热线：010-81055256
反馈／投稿／推荐信箱：315@ptpress.com.cn
人民邮电出版社教育服务与资源下载社区：www.ryjiaoyu.com

ISBN 978-7-115-48978-4

ISBN 978-7-115-48978-4
定价：36.00 元

封面设计：董志桢

工业和信息化"十三五"规划教材

线性代数
习题全解与学习指导

濮燕敏 殷俊锋 ◎ 编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题全解与学习指导 / 濮燕敏，殷俊锋编
. -- 北京 : 人民邮电出版社，2018.11
ISBN 978-7-115-48978-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①濮… ②殷… Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第169659号

内 容 提 要

本书是与《线性代数》(ISBN：978-7-115-42275-0）配套的学习辅导书，是按照工科类本科“线性代数”课程的基本要求，充分吸收相关教材辅导书的精华，结合编者在同济大学多年的教学实践经验，针对当今学生的知识结构和习惯特点编写而成的．全书共 5 章，分别是线性方程组与矩阵、方阵的行列式、向量空间与线性方程组解的结构、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．每章包含知识结构、归纳总结、典型例题、习题详解 4 个部分．

本书可作为非数学类专业的学生学习“线性代数”课程的参考书，也可作为硕士研究生入学考试的辅导书．典型例题和习题详解的内容还可供任课老师在习题课时选用．

◆ 编　　　濮燕敏　殷俊锋
责任编辑　刘海溧
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.25　　　2018 年 11 月第 1 版
字数：246 千字　　　2018 年 11 月河北第 1 次印刷

定价：36.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

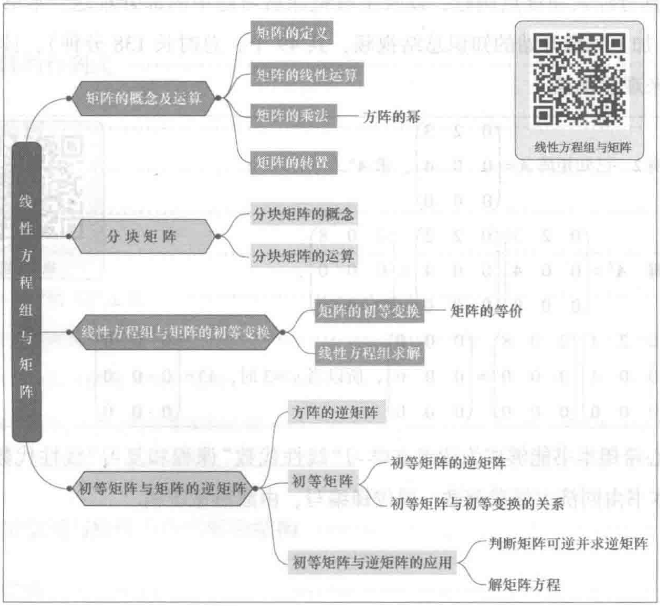
前　言

"线性代数"是理工科学生必修的一门重要的基础课程，它的基本概念、基本理论和基本运算具有较强的逻辑性、抽象性. 为了帮助读者理解基本概念，掌握基本解题方法，巩固、提高和拓宽所学知识，我们按照工科类本科"线性代数"课程的基本要求，结合在同济大学多年的教学经验编写了本书. 本书的章节内容和教材匹配，每一章所选的例题都是本章的经典综合性例题，是教材例题的补充和深化.

本书经编者精心设计，主要具有 3 个特点.

一、内容分为 4 个模块

1. 知识结构. 每章通过思维导图的方式来梳理知识结构，帮助学生构建宏观脉络，了解本章的主要内容.



2. 归纳总结. 每章都配有对知识点的"归纳总结". 这一部分全面梳理了本章的重点概念和主要结论，帮助学生巩固所学知识.

3. 典型例题. 这一部分给出了大量的经典例题以及解题过程. 典型例题的题型与教材例题不同，属于每章的综合性例题，有些例题还给出了多种解法. 典型例题类型广、梯度大，是对教材例题的一个补充、加深和拓展. 通过学习这些例题，读者可以加深对所学知识的理解.

4. 习题详解. 每章的“习题详解”给出了配套主教材的全部习题答案，包括教材每一节后的习题以及每章测试题，可以帮助学生有效巩固课堂学习成果.

二、精选考研真题

每章的例题中，编者还精心挑选了部分研究生入学考试的真题，并在文中注明了真题的时间. 这部分真题不仅与每章内容匹配，而且能更全面、准确地体现教学大纲和考研大纲的要求. 多做考研真题并由此总结、归纳解题规律和方法，对启迪思维、提高能力、加深对线性代数基础知识的理解都是大有好处的.

三、配套微课视频

1. 每章的知识结构中都配有二维码视频，介绍了本章知识脉络，读者扫描二维码可以随时观看视频进行复习.

2. 针对部分经典和难点例题，以及主教材课后习题中的部分难题，本书还专门制作了讲解视频(加上每章开始的知识总结视频，共 49 个，总时长 138 分钟)，读者可以通过扫描二维码来观看视频.

例 2 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

微课视频

解 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以当 $n\geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

我们衷心希望本书能够成为读者在学习“线性代数”课程和复习“线性代数”课程时的得力助手. 本书由同济大学濮燕敏、殷俊锋编写，由濮燕敏统稿.

编　者

2018 年 7 月

目　录

第一章　线性方程组与矩阵 …… 1
一、知识结构 …… 1
二、归纳总结 …… 1
三、典型例题 …… 8
四、习题详解 …… 15
习题 1-1　矩阵的概念及运算 …… 15
习题 1-2　分块矩阵 …… 19
习题 1-3　线性方程组与矩阵的初等变换 …… 22
习题 1-4　初等矩阵与矩阵的逆矩阵 …… 28
测试题一 …… 33
第二章　方阵的行列式 …… 39
一、知识结构 …… 39
二、归纳总结 …… 39
三、典型例题 …… 44
四、习题详解 …… 52
习题 2-1　行列式的定义 …… 52
习题 2-2　行列式的性质 …… 53
习题 2-3　行列式按行（列）展开 …… 58
习题 2-4　矩阵求逆公式与克莱姆法则 …… 62
测试题二 …… 66
第三章　向量空间与线性方程组解的结构 …… 73
一、知识结构 …… 73
二、归纳总结 …… 74
三、典型例题 …… 78

四、习题详解 …… 86
习题 3-1 向量组及其线性组合 …… 86
习题 3-2 向量组的线性相关性 …… 88
习题 3-3 向量组的秩与矩阵的秩 …… 92
习题 3-4 线性方程组解的结构 …… 96
习题 3-5 向量空间 …… 102
测试题三 …… 106

第四章 相似矩阵及二次型 …… 118

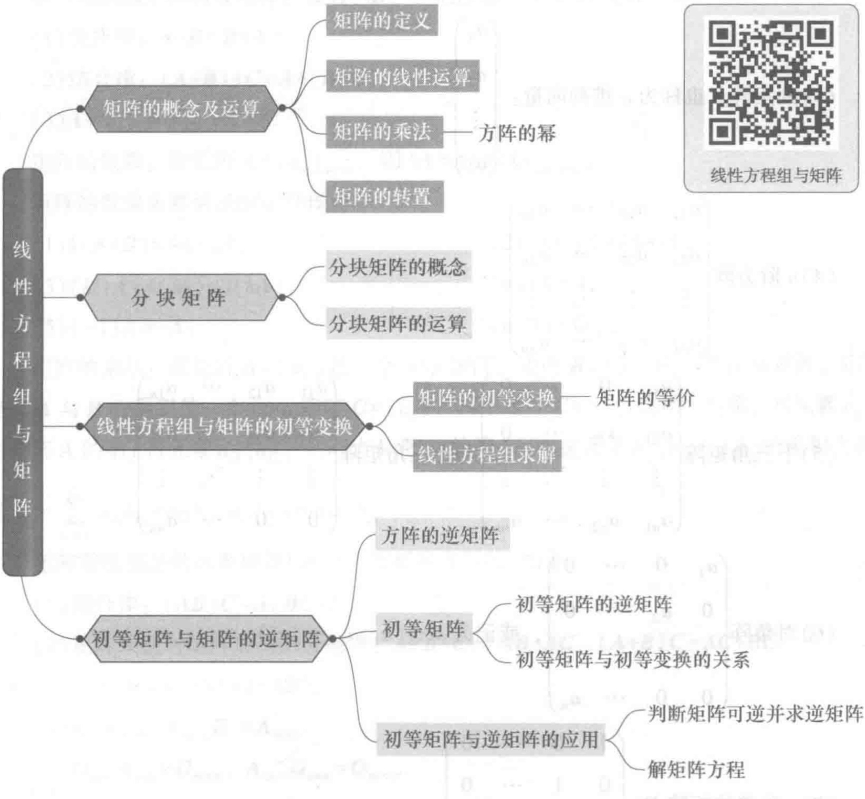
一、知识结构 …… 118
二、归纳总结 …… 119
三、典型例题 …… 123
四、习题详解 …… 131
习题 4-1 向量的内积、长度及正交性 …… 131
习题 4-2 方阵的特征值与特征向量 …… 133
习题 4-3 相似矩阵 …… 137
习题 4-4 实对称矩阵的相似对角化 …… 141
习题 4-5 二次型及其标准形 …… 150
习题 4-6 正定二次型与正定矩阵 …… 155
测试题四 …… 158

第五章 线性空间与线性变换 …… 165

一、知识结构 …… 165
二、归纳总结 …… 165
三、典型例题 …… 168
四、习题详解 …… 173
习题 5-1 线性空间的定义与性质 …… 173
习题 5-2 维数、基与坐标 …… 178
习题 5-3 线性变换 …… 182
测试题五 …… 185

第一章　线性方程组与矩阵

一、知识结构



线性方程组与矩阵

二、归纳总结

1. 矩阵的概念及运算

矩阵：$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为(a_{ij})，有时为了强调矩阵的行数和列数，也记为$(a_{ij})_{m\times n}$. 数 a_{ij}位于矩阵(a_{ij})的第 i 行第 j 列，称为矩阵的$(i,\ j)$元素，其中 i 称为元素 a_{ij}的行标，j 称为元素 a_{ij}的列标.

特殊矩阵列举如下.

(1)1×1 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a)$，也记为 $\boldsymbol{A}=a$.

(2)行矩阵，也称为 n 维行向量：$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(3)列矩阵，也称为 n 维列向量：$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(4)n 阶方阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(5)下三角矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$与上三角矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(6)对角阵$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$，或记为 $diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(7)n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

同型矩阵：两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称这两个矩阵为同型矩阵.

矩阵相等：如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 中所有对应位置的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

负矩阵：对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为$-\boldsymbol{A}$.

矩阵的加(减)法：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵加法满足的运算规律：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是任意三个 $m\times n$ 矩阵，则

(1)交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2)结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

矩阵的数乘：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘运算满足的运算规律：

(1)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；　　(2)$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3)$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；　　(4)$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(5)$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$；　　(6)$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

矩阵的乘法：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ip}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应元素 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{pj}$ 的乘积之和，即 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$.

矩阵乘法满足的运算规律(假设运算都是可行的)如下.

(1)结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(2)矩阵乘法对矩阵加法的分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

(3)$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$.

(4)$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

(5)$\boldsymbol{O}_{m\times s}\boldsymbol{A}_{s\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{O}_{s\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

矩阵的转置：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

矩阵的转置满足的运算规律(这里 k 为常数，A 与 B 为同型矩阵)：

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；　　(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　　(4)$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

对称矩阵：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵. 对称矩阵的元素

满足 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j;\ i,\ j=1,2,\cdots,n)$.

反对称矩阵：n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 如果满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$，则称 A 为反对称矩阵. 反对称矩阵的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j;\ i,\ j=1,2,\cdots,n)$，且 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$.

2. 分块矩阵

分块矩阵：对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时常用一些横线和竖线将矩阵 A 分划成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的运算如下.

(1)分块矩阵加(减)运算：设 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵，对两个矩阵的行和列采用相同的分块方式，不妨设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 的行数相同、列数相同，则有

$$A\pm B=\begin{pmatrix} A_{11}\pm B_{11} & A_{12}\pm B_{12} & \cdots & A_{1t}\pm B_{1t} \\ A_{21}\pm B_{21} & A_{22}\pm B_{22} & \cdots & A_{2t}\pm B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}\pm B_{s1} & A_{s2}\pm B_{s2} & \cdots & A_{st}\pm B_{st} \end{pmatrix}.$$

(2)分块矩阵的数乘运算：矩阵的分块方式没有特别规定，对任意的分块

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}，都有\ kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1t} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{st} \end{pmatrix}.$$ 所以在矩阵的数乘运算中，对矩阵的分块可以根据矩阵本身的特点而定.

(3)分块矩阵的乘法：设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，要求矩阵 A 的列分块方式与矩阵 B 的行分块方式保持一致，而对矩阵 A 的行分块方式及矩阵 B 的列分块方式没有任何要求和限制. 不妨设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tk} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{ku} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1u}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2u}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{t1} & \boldsymbol{C}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{tu}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{t=1}^{k}\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

(4)分块矩阵的转置：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tk}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{t1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{t2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1k}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2k}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tk}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

(5)分块对角阵：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，且这些非零子块都是方阵，而其余子块都是零矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 都是方阵，这样的分块阵称为分块对角阵.

3. 线性方程组与矩阵的初等变换

矩阵的初等行变换：

(1)交换矩阵的某两行，用 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示交换矩阵的第 i、j 两行；

(2)矩阵的某一行乘以非零数，用 kr_i 表示矩阵的第 i 行元素乘以非零数 k；

(3)将矩阵的某一行的倍数加到另一行，用 r_j+kr_i 表示将矩阵第 i 行的 k 倍加到第 j 行.

矩阵的初等列变换：将矩阵初等行变换定义中的“行”换成“列”(记号由“r”换成“c”)，就得到了矩阵初等列变换的定义.

矩阵的初等变换：矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

初等变换的逆变换：三种初等行(列)变换都是可逆的，初等行变换的逆变换分别为：变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；变换 kr_i 的逆变换是 $\frac{1}{k}r_i$；变换 r_j+kr_i 的逆变换是 $r_j+(-k)r_i$.

行阶梯形矩阵：形如$\begin{pmatrix}1&-1&1&4\\0&1&0&1\\0&0&1&4\end{pmatrix}$的矩阵，称为行阶梯形矩阵. 其特点是：可画一条阶梯线，线的下方全为零；每个台阶只有一行，台阶数就是非零行的行数；每一非零行的第一个非零元素位于上一行第一个非零元的右侧.

行最简形矩阵：形如$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&4\end{pmatrix}$的阶梯形矩阵，称为行最简形矩阵. 其特点是：它的非零行的第一个非零元素全为1，并且这些非零元素所在的列的其余元素全为零.

矩阵的等价：若矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等行(列)变换化为矩阵$\boldsymbol{B}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$行(列)等价；若矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换化为矩阵$\boldsymbol{B}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$等价. 用$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$行等价，用$\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$列等价，用$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$等价.

定理 (1)任意一个$m\times n$矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵；

(2)任意一个$m\times n$矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行最简形矩阵；

(3)任意一个$m\times n$矩阵总可以经过若干次初等变换(行变换和列变换)化为它的标准形$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$，其中$r$为行阶梯形矩阵中非零行的行数.

用矩阵的初等行变换解线性方程组：

(1)写出n元非齐次线性方程组的增广矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$；

(2)对$\widetilde{\boldsymbol{A}}$实施初等行变换，化为行最简形矩阵$\widetilde{\boldsymbol{R}}$；

(3)写出以$\widetilde{\boldsymbol{R}}$为增广矩阵的线性方程组；

(4)以第一个非零元为系数的未知量作为固定未知量，留在等号的左边，其余的未知量作为自由未知量，移到等号的右边，并令自由未知量为任意常数，从而求得线性方程组的解.

命题 (1)n元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列；

(2)n元非齐次线性方程组有唯一解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列，且第一个非零元的个数等于未知量的个数；

(3)n元非齐次线性方程组有无穷多解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列，且第一个非零元的个数小于未知量的个数.

4. 初等矩阵与矩阵的逆矩阵

逆矩阵的定义：设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，如果存在n阶方阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则称矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆的，矩阵$\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵；否则称$\boldsymbol{A}$是不可逆的.

逆矩阵的性质：

(1)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，并且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2)若矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都可逆，则它们的乘积 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s$ 也可逆，并且 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$；

(3)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，并且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(4)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆并且数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆，并且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

初等矩阵：对 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 实施一次初等变换得到的矩阵称为 n 阶初等矩阵.

(1)交换单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行和第 j 行，或交换 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列和第 j 列，得到初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i,\ j)$. 即

$$\boldsymbol{E}(i,\ j)=\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

(2)用非零的数 k 乘以单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行或第 i 列，得到初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i(k))$. 即

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& k && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{pmatrix}\text{第 } i \text{ 行}.$$

(3)将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行(或将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 列乘以 k 加到第 i 列)，得到初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i(k),\ j)$，即

$$\boldsymbol{E}(i(k),\ j)=\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && 0 && \\ &&& \ddots &&& \\ && k && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

命题 1 初等矩阵都是可逆的，并且初等矩阵的逆矩阵仍为同一类型的初等矩阵. 即

$$E(i,\ j)^{-1}=E(i,\ j),\ E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\ E(i(k),\ j)^{-1}=E(i(-k),\ j).$$

命题 2 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

定理 1 下面命题互相等价：

(1) n 阶方阵 A 可逆；

(2) 方阵 A 行等价于 n 阶单位矩阵 E；

(3) 方阵 A 可表示为一些初等方阵的乘积.

定理 2 对于任意 $m\times n$ 矩阵 A，均存在一个 m 阶可逆方阵 P 和一个 n 可逆方阵 Q，使得 PAQ 为标准型.

三、典型例题

在矩阵乘法运算中，有三种特殊矩阵的方幂的求法是需要大家掌握的，我们以例题的方式给出具体的求解方法.

第一种，n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^{T}$，其中 α，β 均为 $n\times 1$ 维列矩阵，求 A^n.

由于矩阵乘法满足结合律，所以

$$A^n=(\alpha\beta^{T})^n=\underbrace{\alpha\beta^{T}\cdot\alpha\beta^{T}\cdots\alpha\beta^{T}}_{n\text{个}}=\alpha\underbrace{(\beta^{T}\cdot\alpha)\cdots(\beta^{T}\cdot\alpha)}_{n-1\text{个}}\beta^{T}=\alpha(\beta^{T}\alpha)^{n-1}\beta^{T},$$

而 $\beta^{T}\alpha$ 是一个实数，由矩阵的数乘运算性质，有 $A^n=(\beta^{T}\alpha)^{n-1}\alpha\beta^{T}$.

例 1 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求 A^n.

解 由 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 1)=\alpha\beta^{T}$，其中

微课视频

$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta^{T}=(1\quad -1\quad 1)$，而 $\beta^{T}\alpha=(1\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=-2$，所以

$$A^n=(\beta^{T}\alpha)^{n-1}\alpha\beta^{T}=(-2)^{n-1}\alpha\beta^{T}=(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 1)=(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

类似于例 1 的矩阵是秩 $R(A)=1$ 的矩阵(矩阵的秩的概念见教材第三章第三节). 可以证明, 秩为 1 的矩阵一定可以写成一个列向量与一个行向量的乘积的形式, 具体的证明过程可以参见第三章典型例题的例 12.

第二种, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

求这种矩阵的方幂时, 可以先求 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$, 然后找规律, 求出 $\boldsymbol{A}^n$.

例 2　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

微课视频

解　$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以当 $n\geqslant 3$ 时, $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

例 3　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$, 由例 2 可知, $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $n\geqslant 3$ 时,

$\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{BE}$, 所以有

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{E}^n+C_n^1\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{B}^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2n&3n\\0&0&4n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{8n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2n&4n^2-n\\0&1&4n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

第三种，若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，其中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆阵，则 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{PB}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.（当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似. 矩阵相似的概念见教材第四章第三节.）

例 4 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&2&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&2&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$，

所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且逆矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

微课视频

于是由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例 5 （**考研真题** 1999 年数学三）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$ $=$________.

解 由于 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}.$$

另解 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，由于

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

例 6 （**考研真题** 2008 年数学二第 7 题）【单选题】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则(　　).

A. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

B. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

微课视频

D. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解 由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，且$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，且$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$，且$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$. 即$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，且$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，且$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$. 所以正确答案为 C.

例 7 【单选题】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则下列说法中正确的是(　　).

微课视频

A. 若 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆

B. 若 $\boldsymbol{A}$ 没有全零行，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆

C. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 没有全零行

D. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，k 为任意实数，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆

解 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 没有全零行，但由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，选项 A、B 错；当 $k=0$ 时，$k\boldsymbol{A}$ 不可逆，选项 D 错；若 $\boldsymbol{A}$ 有全零行，则 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$ 必有全零行，于是 $\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可逆. 所以正确答案为 C.

例 8 【单选题】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则(　　).

A. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　　　B. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$

C. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　　　　D. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

解 由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$ 有$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，从而(由教材第二章第二节推论 4)得 $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$；或是由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$ 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{E}$，从而得 $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$. 所以正确答案为 D.

例 9 【单选题】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，则下列说法正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵　　　　B. $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵

C. $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵　　　　D. $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵

解 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，与已知条件矛盾，选项 D 正确，选项 A 错误.

满足条件 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 的矩阵未必是零矩阵，例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，选项 B 错误.

满足条件 $A^2=A$ 且 $A\neq E$ 的矩阵未必是对称阵，例如，$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，选项 C 错误.

所以正确答案为 D.

下面两道例题都是考察初等变换和初等矩阵的，主要用到命题：对矩阵施行一次初等行变换，相当于在这个矩阵的左边乘以相应的初等矩阵；对矩阵施行一次初等列变换，相当于在这个矩阵的右边乘以相应的初等矩阵. 希望读者通过例 10 和例 11 学会应用这个命题.

例 10 （**考研真题** 2006 年数学一第 12 题）【**单选题**】设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）.

微课视频

A. $C=P^{-1}AP$　　B. $C=PAP^{-1}$　　C. $C=P^{T}AP$　　D. $C=PAP^{T}$

解 将已知条件用初等矩阵表述，有

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=PA,\quad C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=BP^{-1},$$

所以 $C=BP^{-1}=PAP^{-1}$，因此答案为 B.

例 11 （**考研真题** 2004 年数学一第 11 题）【**单选题**】设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 将已知条件用初等矩阵表述，有

$$B=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以 $C=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，从而正确答案为 D.

例 12 （**考研真题** 2012 年数学一第 6 题）【**单选题**】设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

微课视频

解 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{E}(1(1),\ 2)=\boldsymbol{PE}(1(1),2)$,

其中 $\boldsymbol{E}(1(1),\ 2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是初等矩阵，且

$$(\boldsymbol{E}(1(1),\ 2))^{-1}=\boldsymbol{E}(1(-1),\ 2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=(\boldsymbol{PE}(1(1),\ 2))^{-1}\boldsymbol{APE}(1(1),\ 2)=(\boldsymbol{E}(1(1),\ 2))^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{E}(1(1),\ 2)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

所以正确答案为 B.

例 13　(**考研真题**　2017 年数学二第 7 题)【**单选题**】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\quad)$.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$

解 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

因此答案为 B.

例 14　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，证明：

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$；

(2) 如果 $AB=BA$，则 $B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$；

(3) 等式 $B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$ 总成立.

证明 (1) 如果 A、B 都可逆，则

$$\begin{aligned}B(A+B)^{-1}A&=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}=(B^{-1}+A^{-1})^{-1}\\&=(B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.\end{aligned}$$

(2) 由 $A+B$ 可逆，有 $(A+B)(A+B)^{-1}=E$，又 $AB=BA$，从而有

$$\begin{aligned}A(A+B)^{-1}B&=A(A+B)^{-1}B\cdot E=A(A+B)^{-1}B(A+B)(A+B)^{-1}\\&=A(A+B)^{-1}BA(A+B)^{-1}+A(A+B)^{-1}BB(A+B)^{-1}\\&=A(A+B)^{-1}AB(A+B)^{-1}+A(A+B)^{-1}BB(A+B)^{-1}\\&=A(A+B)^{-1}(A+B)B(A+B)^{-1}=AB(A+B)^{-1}=BA(A+B)^{-1}\\&=B(A+B)^{-1}(A+B)A(A+B)^{-1}\\&=B(A+B)^{-1}AA(A+B)^{-1}+B(A+B)^{-1}BA(A+B)^{-1}\\&=B(A+B)^{-1}AA(A+B)^{-1}+B(A+B)^{-1}AB(A+B)^{-1}\\&=B(A+B)^{-1}A(A+B)(A+B)^{-1}\\&=B(A+B)^{-1}A.\end{aligned}$$

(3) 由 $A+B$ 可逆，有 $(A+B)(A+B)^{-1}=(A+B)^{-1}(A+B)=E$，于是

$$\begin{aligned}(A+B)(A+B)^{-1}=E&\Rightarrow(A+B)(A+B)^{-1}B=EB\\&\Rightarrow A(A+B)^{-1}B+B(A+B)^{-1}B=B\\&\Rightarrow A(A+B)^{-1}B=B-B(A+B)^{-1}B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)^{-1}(A+B)=E&\Rightarrow B(A+B)^{-1}(A+B)=BE\\&\Rightarrow B(A+B)^{-1}A+B(A+B)^{-1}B=B\\&\Rightarrow B(A+B)^{-1}A=B-B(A+B)^{-1}B.\end{aligned}$$

所以 $B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$ 总成立.

例 14 只用到了矩阵乘法和逆矩阵的计算性质，希望大家能从此例体会矩阵乘法和逆矩阵的基本计算.

例 15 （**考研真题** 2013 年数学二第 22 题）设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a，b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C.

微课视频

解 由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$. 由 $AC-CA=B$ 可得

$$\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & b\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}ax_3-x_2 & -ax_1+x_2+ax_4\\x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & b\end{pmatrix},$$

整理后可得方程组$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\-ax_1+x_2+ax_4=1,\\x_1-x_3-x_4=1,\\x_2-ax_3=b.\end{cases}$

对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\-a & 1 & 0 & a & 1\\1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & 0\\0 & 1 & -a & 0 & a+1\\0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix},$$

由于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 存在，故该方程组有解，于是 $a+1=0$，且 $b=0$，即 $a=-1$，且 $b=0$.

当 $a=-1$，$b=0$ 时，增广矩阵等价于$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，从而原方程组等价于

$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=1,\\x_2+x_3=0.\end{cases}$令 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，移项，得原方程组的通解为$\begin{cases}x_1=1+c_1+c_2,\\x_2=-c_1.\end{cases}$ c_1，c_2 为任意常数.

所以 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+c_1+c_2 & -c_1\\c_1 & c_2\end{pmatrix}$，$c_1$，$c_2$ 为任意常数.

四、习题详解

习题 1-1 矩阵的概念及运算

1. 设 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 1\\2 & 1 & 3 & -1 & 3\\1 & -1 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$，写出 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵的线性方程组.

解 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&1&3&-1\\1&-1&1&4\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},$$

因此有

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&1&3&-1\\1&-1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},$$

写成线性方程组的形式

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=1,\\2x_1+x_2+3x_3-x_4=3,\\x_1-x_2+x_3+4x_4=5.\end{cases}$$

2. 设等式$\begin{pmatrix}1&2\\a&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4\\7&1\end{pmatrix}$成立，求 a，b，x，y.

解 $\begin{pmatrix}1&2\\a&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4\\7&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1+x&2+y\\a+3&b+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4\\7&1\end{pmatrix}$，

得到

$$\begin{cases}1+x=3,\\2+y=-4,\\a+3=7,\\b+4=1.\end{cases}$$

所以有 $x=2$，$y=-6$，$a=4$，$b=-3$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&1&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&5&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$，计算（1）$A+2B$，$3A-B$；（2）$AB^{\mathrm T}$ 和 $A^{\mathrm T}B$.

解 (1)$A+2B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&1&-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&5&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2&-1+10&2+2\\2-4&1-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&9&4\\-2&-1&-2\end{pmatrix}$,

$$3A-B=3\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&5&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-1&-3-5&6-1\\6+2&3+1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-8&5\\8&4&-6\end{pmatrix}.$$

$$(2)AB^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\5&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-5+2&-6+1\\2+5-2&-4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-5\\5&-5\end{pmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}}B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&1\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4&15-2&3\\-1-2&-5-1&-1\\2+4&10+2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&13&3\\-3&-6&-1\\6&12&2\end{pmatrix}.$$

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}$，求 $(A+B)(A-B)$.

解　$$(A+B)(A-B)=\left(\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}3&-3\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+6&-9-9\\-4-2&-12+3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-18\\-6&-9\end{pmatrix}.$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&5&2\end{pmatrix}$，求 $A^2+3A-2B$.

解　$$A^2+3A-2B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}^2+3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&5&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&4\\0&4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&6\\0&6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-4&-10\\0&-10&-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+3-2&0&0\\0&5+3-4&4+6-10\\0&4+6-10&5+3-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

6. 计算下列各题：

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(3,\ -2,\ 1)$；　　(2) $(2,\ 3,\ 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$；

(3) $(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n$.

解 （1）$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(3\quad -2\quad 1)=\begin{pmatrix}3&-2&1\\6&-4&2\\9&-6&3\end{pmatrix}.$

（2）$(2\quad 3\quad 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=2-3+2=1.$

（3）$$(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x+y-z\quad x+2y+z\quad -x+y)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$=(x^2+xy-xz)+(xy+2y^2+yz)+(-xz+yz)$$
$$=x^2+2y^2+2xy-2xz+2yz.$$

（4）记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{BE}$，所以

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\boldsymbol{E}^{n-k}\boldsymbol{B}^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\boldsymbol{B}^k.$$

由于

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以当 $k\geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\boldsymbol{B}^k=C_n^0\boldsymbol{B}^0+C_n^1\boldsymbol{B}^1+C_n^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{B}^2$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，即有

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{cases}a+c=a,\\b+d=a+b,\\c=c,\\d=c+d,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0,\\a=d.\end{cases}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$，其中 a，b 为任意常数.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵.

证明

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A},$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}).$$

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 $$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&&\\&\lambda_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^n\end{pmatrix}.$$

习题 1-2 分块矩阵

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&4\\0&0&2&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\3&0&2&1\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&3&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AC}$ 及 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

解 $$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&0&0\\2&1&0&0\\\hline0&0&1&4\\0&0&2&5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\\hline3&0&2&1\\1&-1&1&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3&\boldsymbol{B}_4\end{pmatrix},$$

$$C=\left(\begin{array}{cc|cc}2&4&0&0\\1&3&0&0\\\hline 0&0&3&1\\0&0&0&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}C_1&O\\O&C_2\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&O\\O&C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1C_1&O\\O&A_2C_2\end{pmatrix}.$$

而 $A_1C_1=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&15\\5&11\end{pmatrix}$，$A_2C_2=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9\\6&12\end{pmatrix}$. 所以

$$AC=\begin{pmatrix}7&15&0&0\\5&11&0&0\\0&0&3&9\\0&0&6&12\end{pmatrix}.$$

$$AB-B^{T}A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_1^{T}&B_3^{T}\\B_2^{T}&B_4^{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2\\A_2B_3&A_2B_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_1^{T}A_1&B_3^{T}A_2\\B_2^{T}A_1&B_4^{T}A_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1-B_1^{T}A_1&A_1B_2-B_3^{T}A_2\\A_2B_3-B_2^{T}A_1&A_2B_4-B_4^{T}A_2\end{pmatrix}.$$

而

$$A_1B_1-B_1^{T}A_1=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$A_1B_2-B_3^{T}A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&17\\-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-16\\4&6\end{pmatrix},$$

$$A_2B_3-B_2^{T}A_1=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-4\\11&-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5\\9&-6\end{pmatrix},$$

$$A_2B_4-B_4^{T}A_2=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&9\\9&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&13\\5&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\4&-2\end{pmatrix},$$

所以

$$AB-B^{T}A=\begin{pmatrix}0&0&-2&-16\\0&0&4&6\\4&-5&2&-4\\9&-6&4&-2\end{pmatrix}.$$

2. 设 A 是一个 3 阶方阵，矩阵 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$，利用分块矩阵的乘法求 AB.

解 设 $A=\left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array}\right)=(A_1\quad A_2\quad A_3)$，

$$AB=(A_1\quad A_2\quad A_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=(\lambda_1A_1,\ \lambda_2A_2,\ \lambda_3A_3)=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11} & \lambda_2a_{12} & \lambda_3a_{13} \\ \lambda_1a_{21} & \lambda_2a_{22} & \lambda_3a_{23} \\ \lambda_1a_{31} & \lambda_2a_{32} & \lambda_3a_{33}\end{pmatrix}.$$

3. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}O & E_{n-1} \\ 1 & O\end{pmatrix}$，其中 E_{n-1} 表示 $n-1$ 阶单位阵，证明 $A^k=\begin{pmatrix}O & E_{n-k} \\ E_k & O\end{pmatrix}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，$A^n=E_n$.

解 设 $A=(e_n\quad e_1\quad e_2\quad \cdots\quad e_{n-1})$，由于 Ae_k 等于 A 的第 k 列，所以当 $k\neq1$ 时，$Ae_k=e_{k-1}$，并且 $Ae_1=e_n$.

当 $i>k$ 时，$A^ke_i=A^{k-1}e_{i-1}=\cdots=Ae_{i-k+1}=e_{i-k}$.

当 $i\leqslant k$ 时，$A^ke_i=A^{k-i+1}A^{i-1}e_i=A^{k-i+1}e_1=A^{k-i}Ae_1=A^{k-i}e_n=e_{n-k+i}$.

因此

$$\begin{aligned}A^k&=A^kE=A^k(e_1\quad\cdots\quad e_k\quad e_{k+1}\quad\cdots\quad e_n)\\&=(A^ke_1\quad\cdots\quad A^ke_k\quad A^ke_{k+1}\quad\cdots A^ke_n)\\&=(e_{n-k+1}\quad\cdots e_n\quad e_1\quad\cdots\quad e_{n-k})\\&=\begin{pmatrix}0 & E_{n-k} \\ E_k & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 分别是 $n_i(i=1,2,\cdots,s)$ 阶方阵，分块对角阵 $D=\begin{pmatrix}A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s\end{pmatrix}$，求 D^k，其中 k 是正整数.

解 $$D^k=\begin{pmatrix}A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}A_1^k & O & \cdots & O \\ O & A_2^k & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s^k\end{pmatrix}.$$

习题 1-3　线性方程组与矩阵的初等变换

1. 用初等行变换将下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

解 (1) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+(-2)r_1}]{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+(-3)r_2]{r_3+(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-4)r_1 \\ r_4+(-3)r_1}]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2 \\ r_3+11r_2 \\ r_4+7r_2}]{-\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+\frac{2}{5}r_3 \\ r_2+\frac{3}{5}r_3 \\ r_4+(-\frac{9}{5})r_3}]{-\frac{5}{18}r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 解下列齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=0; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-x_4=0, \\ x_1+2x_2-9x_3-5x_4=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

解　(1) 对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2 \\ r_3+3r_2}]{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-\frac{5}{2})r_3 \\ r_2+\frac{7}{2}r_3}]{-\frac{2}{13}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而原方程等价于

$$\begin{cases} x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0. \end{cases}$$

即为原方程的解.

(2) 对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-5)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & -2 & 7 \\ 0 & 28 & -4 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+5r_2 \\ r_3+(-28)r_2}]{\frac{1}{14}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而原方程等价于

$$\begin{cases} x_1+\frac{9}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4=0, \\ x_2-\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4=0. \end{cases}$$

移项，得原方程的解为

$$\begin{cases} x_1=-\frac{9}{7}C_1+\frac{1}{2}C_2, \\ x_2=\frac{1}{7}C_1-\frac{1}{2}C_2, \\ x_3=C_1, \\ x_4=C_2, \end{cases}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

(3) 对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&4&0&-1\\1&2&-9&-5\\-1&-2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1\\r_4+r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&-6&-3\\0&0&-12&-6\\0&0&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-3)r_2\\r_3+12r_2\\r_4+(-6)r_2}]{-\frac{1}{6}r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而原方程等价于

$$\begin{cases}x_1+2x_2-\frac{1}{2}x_4=0,\\x_3+\frac{1}{2}x_4=0.\end{cases}$$

移项，得原方程的解为

$$\begin{cases}x_1=-2C_1+\frac{1}{2}C_2,\\x_2=C_1,\\x_3=-\frac{1}{2}C_2,\\x_4=C_2,\end{cases}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

3. 解下列非齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=-5,\\2x_1+3x_2+x_3=4,\\3x_1+8x_2-2x_3=13;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_4=0,\\3x_1+x_2+5x_3-4x_4=2,\\7x_2-10x_3+5x_4=-4,\\3x_1-6x_2+15x_3-9x_4=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\3x_1-2x_2+x_3=4,\\x_1-x_2-x_3=6;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-x_4=1,\\2x_1-2x_2+x_3=1,\\x_1+x_2-2x_3-x_4=-1,\\x_1-x_2+x_3+x_4=2.\end{cases}$

解 (1) 对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\2&3&1&4\\3&8&-2&13\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\0&7&-7&14\\0&14&-14&28\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+2r_2\\r_3+(-14)r_2}]{\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而原方程等价于

$$\begin{cases}x_1+2x_3=-1,\\x_2-x_3=2.\end{cases}$$

令 $x_3=c$，移项，得原方程的解为

$$\begin{cases}x_1=-1-2c,\\x_2=2+c,\\x_3=c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

（2）对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\begin{pmatrix}2&3&0&-1&0\\3&1&5&-4&2\\0&7&-10&5&-4\\3&-6&15&-9&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{pmatrix}2&3&0&-1&0\\3&1&5&-4&2\\0&7&-10&5&-4\\0&-7&10&-5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}2&3&0&-1&0\\3&1&5&-4&2\\0&7&-10&5&-4\\0&0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\times(-\frac{1}{5})}\begin{pmatrix}2&3&0&-1&0\\3&1&5&-4&2\\0&7&-10&5&-4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

方程组中出现了矛盾方程“0=1”，所以该方程组无解.

（3）对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&-2&1&4\\1&-1&-1&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-8&4&4\\0&-3&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-2)r_2\\r_3+3r_2}]{-\frac{1}{8}r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{3}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_3]{-\frac{2}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

从而原方程的解为

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-2,\\x_3=-3.\end{cases}$$

（4）对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\2&-2&1&0&1\\1&1&-2&-1&-1\\1&-1&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\0&0&-3&2&-1\\0&2&-4&0&-2\\0&0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\0&2&-4&0&-2\\0&0&-3&2&-1\\0&0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{\frac{1}{2}r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&1\\0&1&-2&0&-1\\0&0&-1&2&1\\0&0&-3&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+(-3)r_3\\(-1)r_3}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&-2&0&-1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[(-\frac{1}{4})r_4]{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-4&-3\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+4r_4\\r_3+2r_4}]{r_1+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

从而原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=1,\\x_3=1,\\x_4=1.\end{cases}$

4. 设有齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+\ x_2+\lambda x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+\ x_3=0,\\\lambda x_1+\ x_2+\ x_3=0,\end{cases}$ 当 λ 取何值时该方程组只有零解？当 λ 取何值时该方程组有非零解？并在有非零解时求出全部解.

解 对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-\lambda)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}.$$

$\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，

$$\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以只有零解，当 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时有非零解.

当 $\lambda=-2$ 时，

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

非零解为

$$\begin{cases}x_1=c,\\x_2=c,\\x_3=c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

当 $\lambda=1$ 时,

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

非零解为

$$\begin{cases}x_1=-c_1-c_2,\\x_2=c_1,\\x_3=c_2,\end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

5. 设有非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t,\end{cases}$ 讨论 p, t 的取值对该方程组解的影响,并在有无穷多解时求其解.

解 对该线性方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-3)r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&6+p&-2&-1\\0&-2&-4&-4&t\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2\\r_3+r_2\\r_4+2r_2}]{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&8+p&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{pmatrix},$$

当 $t\neq-2$ 时,方程组无解.

当 $t=-2$ 时,方程有无穷多解.

当 $t=-2$,$p\neq-8$ 时,原方程等价于

$$\begin{cases}x_1-4x_3+x_4=-1,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\(8+p)x_3=0,\end{cases}$$

移项,得原方程的解为

$$\begin{cases}x_1=-1-c,\\x_2=1-2c,\\x_3=0,\\x_4=c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

当 $t=-2$，$p=-8$ 时，原方程等价于

$$\begin{cases} x_1-4x_3+x_4=-1, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \end{cases}$$

移项，得原方程的解为

$$\begin{cases} x_1=-1+4c_1-c_2, \\ x_2=1-2c_1-2c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_2, \end{cases}$$

其中 c_1，c_2 为任意常数.

习题 1-4　初等矩阵与矩阵的逆矩阵

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列和第 3 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列乘以非零数 k 加到 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，求满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$.

解　交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列和第 3 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，相当于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以

$$\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}_1$.

把 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列乘以非零数 k 加到 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，相当于在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的右边乘以

$$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BQ}_2=\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{Q}_2$，因此

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，(1)求 $\boldsymbol{P}^{-1}$；(2)计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；(3)计算 $\boldsymbol{A}^{10}$.

解　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

因此

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-6\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$.

(3) 设 $B=P^{-1}AP$，则 $A=PBP^{-1}$，

$$\begin{aligned}A^{10}&=(PBP^{-1})^{10}=PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}\\&=PB(P^{-1}P)\cdot B\cdot(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)\cdot B\cdot P^{-1}=PB^{10}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{10}&0\\0&2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3^{10}&2^{11}\\3^{10}&3\cdot2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3^{11}-2^{11}&2^{11}-2\cdot3^{10}\\3^{11}-3\cdot2^{10}&3\cdot2^{10}-2\cdot3^{10}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}2&2&1\\3&4&3\\1&2&3\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1&3&1&6\\2&1&0&0\\3&2&0&0\\5&7&1&8\end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&-2&2&-1&1&0\\0&2&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_2\\r_3+(-2)r_2}]{(-\frac{1}{2})r_2}$

$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&2&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{(\frac{1}{2})r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

所以逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix}2&2&1&1&0&0\\3&4&3&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3+(-1)r_1}]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1&0\\0&1&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{r_1+(-1)r_2}$

$\begin{pmatrix}1&0&-1&2&-1&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&1&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+(-\frac{3}{2})r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-2&1\\0&1&0&-3&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&1&-1&1\end{pmatrix}$,

所以逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}3&-2&1\\-3&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\-1&2&1&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&4&3&-2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-4)r_2]{r_1+r_2}$

$\begin{pmatrix}1&0&1&2&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&-1&-6&-4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+(-1)r_3\\r_2+(-1)r_3}]{(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&-3&1\\0&1&0&-5&-3&1\\0&0&1&6&4&-1\end{pmatrix}$,

所以逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}-4&-3&1\\-5&-3&1\\6&4&-1\end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix}1&3&1&6&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&0&0&0&0&1&0\\5&7&1&8&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&3&1&6&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&-1&1&0\\2&5&1&8&0&0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}$

$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&-1&1&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\1&3&1&6&1&0&0&0\\2&5&1&8&0&0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&-1&1&0\\0&-1&0&0&0&3&-2&0\\0&2&1&6&1&1&-1&0\\0&3&1&8&0&2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2}$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&-1&1&0\\0&-1&0&0&0&3&-2&0\\0&0&1&6&1&7&-5&0\\0&0&1&8&0&11&-9&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times(-1)\\r_4-r_3}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2&-1&0\\0&1&0&0&0&-3&2&0\\0&0&1&6&1&7&-5&0\\0&0&0&2&-1&4&-4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{2}]{r_3-3r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2&-1&0\\0&1&0&0&0&-3&2&0\\0&0&1&0&4&-5&7&-3\\0&0&0&1&-\frac{1}{2}&2&-2&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&2&-1&0\\0&-3&2&0\\4&-5&7&-3\\-\frac{1}{2}&2&-2&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

4. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&5&-4\\2&4&-5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&3\\4&8\\1&9\end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&4\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}$.

解 (1) $\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&0&3\\2&5&-4&4&8\\2&4&-5&1&9\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&0&3\\0&3&-2&4&2\\0&2&-3&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-1&0&3\\0&1&1&3&-1\\0&2&-3&1&3\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-3&4\\0&1&1&3&-1\\0&0&-5&-5&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{5})}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&-3&4\\0&1&1&3&-1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+2r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-1&2\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&2&1&2\\-1&1&1&-1&1\\1&0&-1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&2&1&2\\0&3&3&0&3\\0&-2&-3&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&2&1&2\\0&1&1&0&1\\0&-2&-3&2&2\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&-1&2&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&2&5\\0&0&1&-2&-4\end{array}\right)$,

所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\-2&-4\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&5&-4\end{pmatrix}$.

(3) 由

$\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&1&1&1&2\\1&-1&1&1&0\\1&1&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&1&1&1&2\\0&0&2&2&2\\0&2&0&0&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&-1&-2\\0&2&0&0&4\\0&0&2&2&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_2\times\frac{1}{2}}$

$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&-1&-2\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&1\end{array}\right)$,

得

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

即

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

再由

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}2&5&0&0&1\\1&3&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&1&2&1\\2&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&1&2&1\\0&-1&-2&-4&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+3r_2}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&-5&-10&-2\\0&1&2&4&1\end{array}\right)$$

得

$$X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -10 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

测试题一

一、填空题

1. 设 A, B 都是 n 阶方阵，则等式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 成立的充分必要条件是________.

解 $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$，因此要使 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 的充分必要条件是 $AB=BA$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$E$ 是 2 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-E=$________.

解 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-E=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}(2\quad 3)-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$

3. 设矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $A^8=$________.

解 因为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=4$,

所以 $A^8=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^8=\underbrace{\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}}_{8个}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^7\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4^7\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$

$$=4^7\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad 1\quad 1)$$

$$=4^7\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，则 $(A-2E)^{-1}=$________.

解 $A-2E=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}2&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+(-1)r_1]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

因此

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

5. 当可逆阵 $P=$____时，等式 $P\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}-2a_{31}&a_{22}-2a_{32}&a_{23}-2a_{33}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$成立.

解 等式右边相当于对矩阵$(a_{ij})_{3\times3}$进行如下初等行变换：将第 3 行乘以(-2)加到第 2 行上，因此

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

二、选择题

1. 以下结论或等式正确的是(　　).

A. 若 $AB=AC$，且 $A\neq O$，则 $B=C$　　B. 若 $A\neq O$，$B\neq O$，则 $AB\neq O$

C. 若 A，B 均为零矩阵，则有 $A=B$　　D. 对角矩阵是对称矩阵

解 对于选项 A，取

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

此时 $B\neq C$.

对于选项 B，取

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ AB=O.$$

对于选项 C，要求 A，B 维数相同. 因此答案为 D.

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，则下列等式不成立的是(　　).

A. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$　　B. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

C. $(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}$　　D. $(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$

解　由 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 于是，$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，选项 A 中等式正确；$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，选项 B 中等式正确；又 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{BB}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，从而$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$，于是，$(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\mathrm{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}$，选项 C 中等式正确；$(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$，选项 D 中等式不正确，所以该题应选 D.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 4×3 矩阵，则下列运算中可以进行的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{AB}$　　C. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$　　D. $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$

解　由加法运算的定义知，两个同型矩阵才能相加. 该题中矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 不是同型矩阵，所以加法运算不能进行. 由乘法运算的定义知，只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时，这两个矩阵才能相乘，且第一个矩阵在左边，第二个矩阵在右边. 在该题中，$\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 4×3 矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，所以 $\boldsymbol{AB}$ 可以进行. 而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 3×4 矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，$\boldsymbol{A}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的行数，因此选项 C、D 中的乘法都不能进行. 故本题的答案是选 B.

4. 设线性方程组的增广矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & \lambda & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$，若线性方程组无解，则 λ 的取值是(　　).

A. 2　　B. −2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

解　$\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ 0 & 1+2\lambda & 2\end{pmatrix}$，

若线性方程组无解，则 $1+2\lambda=0$，于是 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，所以选 D.

5. 设非零阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则下列说法正确的是(　　).

A. 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 均可逆

B. 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 不可逆

C. 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 不可逆，矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆

D. 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 均不可逆

解　$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$.

$\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.

所以矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 都是可逆的，答案为 A.

三、解答题

1. 解矩阵方程 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-1\\2&\frac{1}{3}&1\\-1&-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&2&-2&-1&1&0\\0&0&2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{\frac{1}{2}r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-1\\2&\frac{1}{3}&1\\-1&-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-2\\6&1&3\\-3&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\\frac{9}{2}&\frac{7}{2}&2\\-1&-3&-1\end{pmatrix}.$$

2. 当 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=0\end{cases}$ 有零解、非零解？在有非零解的情况下，求出该线性方程组的解.

解　对该线性方程组的系数矩阵实施初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-\lambda-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda\\0&\lambda&-\lambda\\0&-\lambda&-\lambda^2-2\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda\\0&\lambda&-\lambda\\0&0&-\lambda(\lambda+3)\end{pmatrix}.$$

$\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时只有零解.

$\lambda=0$ 时有非零解，

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

非零解为

$$\begin{cases}x_1=-C_1-C_2,\\x_2=C_1,\\x_3=C_2,\end{cases}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

当 $\lambda=-3$ 时有非零解，

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

非零解为

$$\begin{cases}x_1=C,\\x_2=C,\\x_3=C,\end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $n\geqslant 2$ 为正整数，求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$.

解 因为

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

四、证明题

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，其中的元素均为 1，证明 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是所有元素均为 1 的 n 阶方阵，所以 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=n\boldsymbol{A}$. 于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}\right)&=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}^2\\&=\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}^2-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\\&=\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

且

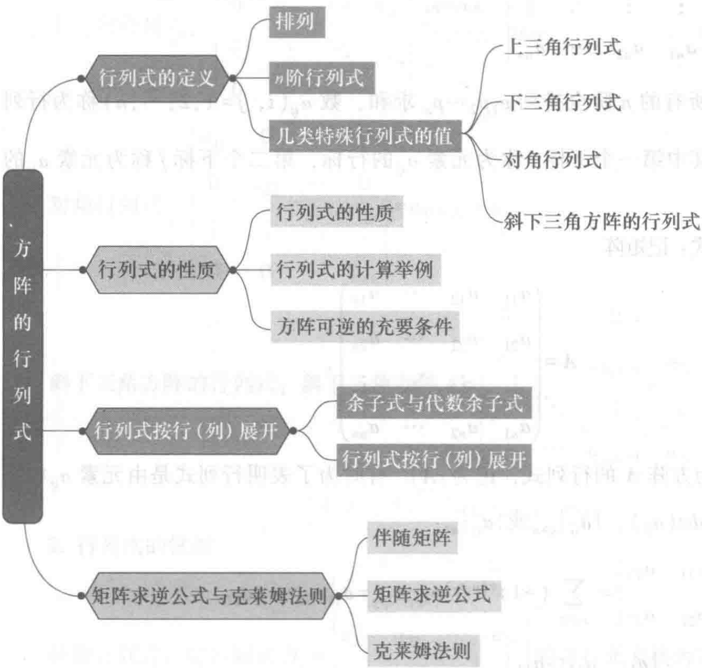
$$\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}\right)(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}+\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

所以

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}.$$

第二章　方阵的行列式

一、知识结构



方阵的行列式

二、归纳总结

1. 行列式的定义

排列：从 1，2，…，n 中任意选取 r 个不同的数排成一列，称为排列.

全排列：将 1，2，…，n 这 n 个不同的数排成一列，称为 n 阶全排列，也简称为全排列.

标准排列：$12\cdots n$ 也是 n 个数的全排列，而且元素是按从小到大的自然顺序排列的，这样的排列称为标准排列.

逆序与逆序数：在一个排列中，如果一对数的排列顺序与自然顺序相反，即排在左边的数比排在它右边的数大，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 标准排列的逆序数为 0.

奇排列与偶排列：逆序数为偶数的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列.

n 阶行列式的定义：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有的 n 阶全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，数 $a_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的 $(i,\ j)$ 元素，其中第一个下标 i 称为元素 a_{ij} 的行标，第二个下标 j 称为元素 a_{ij} 的列标.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式：记矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

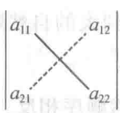
则行列式通常也称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$. 有时为了表明行列式是由元素 a_{ij} 构成的，也简记为 $|\boldsymbol{A}|=det(a_{ij})$、$|a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $|a_{ij}|_n$.

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$

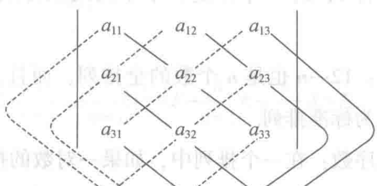
三阶行列式：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

二阶和三阶行列式也可借助于对角线法则来记忆：



,



注：四阶及更高阶的行列式不再适用对角线法则.

下三角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

上三角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

对角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

斜下三角方阵的行列式：斜下三角方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$，则

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 行列式的性质

转置行列式：将行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的各行元素换为同序号的列元素，所得到的行列式 $D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为行列式 D_n 的转置行列式.

性质 1　行列式 D_n 与它的转置行列式 D_n^{T} 相等.

性质 2　互换行列式的两行(或两列)，行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列，交换第 i、j 行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换第 i、j 列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1　若行列式中有两行(或两列)对应元素相等，则行列式等于零.

性质 3 若行列式的某一行(或列)有公因子 k，则公因子 k 可以提到行列式记号外面；或者说，用 k 乘以行列式的某一行(或某一列)，等于用 k 乘以该行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(或列)乘以数 k 记作 kr_i(或 kc_i)，第 i 行(或列)提取公因子 k 记作 $\frac{1}{k}r_i$(或 $\frac{1}{k}c_i$).

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则等式 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ 成立.

推论 2 若行列式的某一行(或某一列)元素全为零，则行列式的值为零.

推论 3 若行列式某两行(或两列)元素对应成比例，则行列式为零.

性质 4 行列式的拆分定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式某一行(或某一列)的 k 倍加到另一行(或另一列)的对应元素上去，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

第 i 行(或第 i 列)乘以数 k 加到第 j 行(或第 j 列)上记作 r_j+kr_i(或 c_j+kc_i).

定理 2 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

推论 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或者 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)，则 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

3. 行列式按行(列)展开

余子式：对任意的 $1\leqslant i,\ j\leqslant n$，在 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中划去第 i 行和第 j 列后剩下的 $n-1$ 阶行列式称为 $(i,\ j)$ 元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

代数余子式：记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 称为 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的 $(i,\ j)$ 元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理　设行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots,n),$$

称为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开，以及

$$|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}(j=1,2,\cdots,n),$$

称为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 j 列展开.

推论　设 $A_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$，$i\neq j$ 或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$，$i\neq j$.

4. 矩阵求逆公式与克莱姆法则

伴随矩阵：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵，A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的 $(i,\ j)$ 元素 a_{ij} 的代数余子式，则矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

引理　设方阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则必有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

定理 1 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有求逆公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

定理 2(Cramer(克莱姆)法则)：如果线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数行列式不等于零，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|},\ x_2=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式的第 j 列元素用 $\boldsymbol{\beta}$ 的元素代替后得到的行列式.

定理 3 如果线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数行列式不等于零，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组一定有解，且解是唯一的.

定理 4 如果线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解或有无穷多解，则它的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

定理 5 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数行列式不等于零，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则它只有零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

定理 6 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则必有它的系数行列式等于零，即 $|\boldsymbol{A}|=0$.

三、典型例题

例 1 设有 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$，证明 $a_{63}a_{32}a_{41}a_{54}a_{25}a_{16}$ 是 D_6 中的一项，并确定该项所带的符号.

微课视频

解 调换项中元素位置，使其行下标为自然排列，得

$$a_{63}a_{32}a_{41}a_{54}a_{25}a_{16}=a_{16}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}a_{63},$$

而列下标排列为 652143，是一个 6 元排列，从而 $a_{16}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}a_{63}$ 是位于 D_6 的不同行不同列的 6 个元素的乘积，故它是 D_6 的一项. 又由排列 652143 的逆序数 $\tau(652143)=11$ 知，所给项应带负号.

例 2 用行列式的定义计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义，每一非零项均由不同行不同列的 5 个非零元素乘积构成. 第 1 行的非零元在第 2 列，第 2 行的非零元在第 3 列，第 3 行的非零元在第 4 列，第 4 行的非

零元在第 5 列，所以第 5 行只能取第 1 列，从而列标排列的逆序数为 $\tau(23451)=4$，因此乘积为 $a_1a_2a_3a_4a_5$，且这个乘积带正号，即 $D_5=\begin{vmatrix}0&a_1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0\\0&0&0&a_3&0\\0&0&0&0&a_4\\a_5&1&2&3&4\end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4a_5$.

例 3　求行列式 $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1+x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1+x\end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1+x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1+x\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1\atop r_4-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\-x&x&0&0\\-x&0&x&0\\-x&0&0&x\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_3\atop c_1+c_4]{c_1+c_2}\begin{vmatrix}4+x&1&1&1\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=x^3(4+x)$.

例 4　(**考研真题**　2015 年数学一第 13 题) n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$______.

解　按第 1 行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\&&\ddots&&\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2$$

$$=2^{n+1}-2.$$

例 5　(**考研真题**　2016 年数学一第 13 题)行列式 $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=$______.

解法一 按第 4 行展开，得

微课视频

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}+3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}+$$

$$2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}+(\lambda+1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-4)(-1)^3+3\lambda(-1)^2+(-2)(-1)\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3$$

$$=4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4.$$

解法二 令 $D_4=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$，按第 1 列展开，得

$$D_4=\lambda D_3+4=\lambda(\lambda D_2+3)+4=\lambda^2(\lambda D_1+2)+3\lambda+4=\lambda^3 D_1+2\lambda^2+3\lambda+4,$$

且 $D_1=\lambda+1$，从而 $D_4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$

例 6 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1+\cos\alpha & 1+\cos\beta & 1+\cos\gamma & 1+\cos\theta\\ \cos\alpha+\cos^2\alpha & \cos\beta+\cos^2\beta & \cos\gamma+\cos^2\gamma & \cos\theta+\cos^2\theta\\ \cos^2\alpha+\cos^3\alpha & \cos^2\beta+\cos^3\beta & \cos^2\gamma+\cos^3\gamma & \cos^2\theta+\cos^3\theta\end{vmatrix}$.

解 该行列式每行的幂次是递增的，从第 2 行开始，每行加上前一行的−1 倍，就得到一个范德蒙德行列式.

微课视频

$$D_4\xlongequal[r_4-r_3]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\theta\\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma & \cos^2\theta\\ \cos^3\alpha & \cos^3\beta & \cos^3\gamma & \cos^3\theta\end{vmatrix}$$

$$=(\cos\theta-\cos\gamma)(\cos\theta-\cos\beta)(\cos\theta-\cos\alpha)(\cos\gamma-\cos\beta)(\cos\gamma-\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha).$$

例 7 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n\end{vmatrix}$.

解 注意到，该行列式的第 2 行到第 n 行均有公因子. 将公因子提到行列式符号

的外面，就得到了范德蒙德行列式的转置行列式，再由行列式与其转置行列式相等即得结果

$$D_n=2\times3\times\cdots\times n\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=\prod_{k=1}^{n}(k!).$$

例 8 已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&-1&5\\3&4&7\end{vmatrix}$，求 $3A_{11}+5A_{21}+4A_{31}$.

微课视频

解法一 A_{i1} 为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 第 1 列元素 a_{i1} 的代数余子式($i=1, 2, 3$)，令 $|\boldsymbol{B}|=3A_{11}+5A_{21}+4A_{31}$，则可知 $|\boldsymbol{B}|$ 的第 1 列元素分别为 3，5，4，且第 1 列元素的代数余子式也是 $A_{i1}(i=1, 2, 3)$，说明行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的第 2 列和第 3 列的元素分别与 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 2 列和第 3 列的元素相同，因此

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}3&0&3\\5&-1&5\\4&4&7\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+5c_2]{c_1+5c_2}\begin{vmatrix}3&0&3\\0&-1&0\\24&4&27\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}(-1)\begin{vmatrix}3&3\\24&27\end{vmatrix}=-9.$$

解法二 仔细观察行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&-1&5\\3&4&7\end{vmatrix}$，发现 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 3 列元素分别为 3，5，7，从而有 $3A_{11}+5A_{21}+4A_{31}=3A_{11}+5A_{21}+7A_{31}-3A_{31}=0-3A_{31}=(-3)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&3\\-1&5\end{vmatrix}=-9.$

例 9 （**考研真题** 2012 年数学二第 14 题）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$______.

微课视频

解 由已知条件得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$，且由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两端取行列式得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2$，从而

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=\left|\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}\cdot|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=(-1)\times3\times3^2=-27.$$

例 10 （**考研真题** 2009 年数学二第 7 题）【单选题】设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，

B^* 分别为 A，B 的伴随矩阵，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）.

A. $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

解　由 $CC^*=|C|E$ 及 C 可逆，可得 $C^*=|C|C^{-1}$，且 $C^{-1}=\frac{1}{|C|}C^*$.

由于分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix} B & O \\ O & A \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6\neq 0,$$

微课视频

从而分块矩阵可逆，于是

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & O \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix},$$

所以答案为 B.

例 11　（**考研真题**　2013 年数学二第 14 题）设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，则 $|A|=$________.

解　$a_{ij}+A_{ij}=0\Rightarrow A_{ij}=-a_{ij}\Rightarrow A^*=-A^{\mathrm{T}}\Rightarrow AA^*=-AA^{\mathrm{T}}=|A|E$，等式两边取行列式得 $-|A|^2=|A|^3$，于是 $|A|=0$ 或 $|A|=-1$.

当 $|A|=0$ 时，由 $-AA^{\mathrm{T}}=O$ 得 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2=0(i=1,\ 2,\ 3)$，从而 $a_{i1}=a_{i2}=a_{i3}=0(i=1,\ 2,\ 3)$，即 $A=O$，与 A 是非零矩阵矛盾，所以 $|A|=-1$.

例 12　设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，$|A|=1$，矩阵 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3)$，求 $|B|$.

解　$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$，

于是 $|B|=\left|(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}\right|=|A|\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=2.$

例 13　【单选题】设 A 是 3 阶可逆矩阵，交换 A 的 1，2 行得到 B，则(　　).

A. 交换 A^* 的 1，2 行得到 B^*　　B. 交换 A^* 的 1，2 列得到 B^*

C. 交换 A^* 的 1，2 行得到 $-B^*$　　D. 交换 A^* 的 1，2 列得到 $-B^*$

解　因为 A 作初等行变换得到 B，所以用初等矩阵左乘 A 得到 B. 由已知得 $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$，于是 $|B|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}\cdot|A|=-|A|$，且

$$B^{-1}=A^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=A^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

微课视频

从而 $B^*=|B|B^{-1}=-|A|A^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-A^*\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

即 $-B^*=A^*\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以正确答案为 D.

例 14　(**考研真题**　2001 年数学一第十题)设 A 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 3 维列向量，使得 $P=(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})$ 可逆，并且 $A^3\boldsymbol{\alpha}=3A\boldsymbol{\alpha}-2A^2\boldsymbol{\alpha}$. 又 3 阶矩阵 B 满足 $A=PBP^{-1}$. (1)求 B；(2)求 $|A+E|$.

解　(1)由于矩阵 $P=(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})$ 可逆，于是 $P^{-1}P=E$，即 $P^{-1}(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})=E$. 所以 $P^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$P^{-1}A\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$P^{-1}A^2\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 从而

$$\begin{aligned}B&=P^{-1}AP=P^{-1}A(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})=(P^{-1}A\boldsymbol{\alpha},P^{-1}A^2\boldsymbol{\alpha},P^{-1}A^3\boldsymbol{\alpha})\\&=(P^{-1}A\boldsymbol{\alpha},P^{-1}A^2\boldsymbol{\alpha},P^{-1}(3A\boldsymbol{\alpha}-2A^2\boldsymbol{\alpha}))=(P^{-1}A\boldsymbol{\alpha},P^{-1}A^2\boldsymbol{\alpha},3P^{-1}A\boldsymbol{\alpha}-2P^{-1}A^2\boldsymbol{\alpha})\\&=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2)由 $A=PBP^{-1}$ 得

$$\begin{aligned}|A+E|&=|PBP^{-1}+E|=|P(B+E)P^{-1}|=|P|\cdot|B+E|\cdot|P^{-1}|=|B+E|\\&=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.\end{aligned}$$

例 15 （**考研真题** 2004 年数学一第 5 题）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|B|=$________.

解 易知 $|A|=3$，利用公式 $A^*A=AA^*=|A|E$，用 A 右乘 $ABA^*=2BA^*+E$ 的两端，得 $3AB=6B+A$，移项，得 $3(A-2E)B=A$. 取行列式得 $3^3|A-2E|\cdot|B|=|A|$，又 $|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$，所以 $|B|=\dfrac{1}{3^3}|A|=\dfrac{1}{9}$.

例 16 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

微课视频

(1) 求行列式 $|A|$；

(2) 当 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解，并求 x_2.

解 (1) 将 $|A|$ 按第 1 列展开，得

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(2) 由克莱姆法则，当 $|A|=1-a^4\neq 0$ 时，即 $a\neq 1$ 且 $a\neq -1$ 时，方程组有唯一解. 且用 $b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ 替代 $|A|$ 的第 2 列得

$$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&0&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{vmatrix}=-a^3,$$

所以

$$x_2=\frac{-a^3}{|A|}=-\frac{a^3}{1-a^4}.$$

例 17 （考研真题 2016 年数学一第 20 题）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix},$$

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解？有唯一解？有无穷多解？在有解时，求此方程的解.

微课视频

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)$，当 $|A|\neq 0$，即 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$ 时，矩阵 A 可逆，从而方程 $AX=B$ 有唯一解 $X=A^{-1}B$. 当 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$ 时，由

$$(A,\ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&2\\0&a+2&0&0&a-4\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&2\\0&1&0&0&\dfrac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\dfrac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)$$

得唯一解为

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}.$$

令 $X=(X_1,\ X_2)$，$B=(\beta_1,\ \beta_2)$，则 $AX=B\Leftrightarrow A(X_1,\ X_2)=(\beta_1,\ \beta_2)\Leftrightarrow AX_1=\beta_1$ 且 $AX_2=\beta_2$. 于是方程 $AX=B$ 有解当且仅当 $AX_1=\beta_1$ 与 $AX_2=\beta_2$ 均有解.

当 $a=-2$ 时，由

$$(A,\ \beta_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\2&-2&1&-2\\-1&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\0&0&3&-6\\0&0&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\0&0&3&-6\\0&0&0&-6\end{array}\right)$$

可知，$AX_2=\beta_2$ 无解，因而当 $a=-2$ 时，方程 $AX=B$ 无解.

当 $a=1$ 时，由

$$(A,\ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&1&1&1&1\\-1&1&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知，$AX_1=\beta_1$ 有无穷多解 $X_1=(1\ \ -k_1-1\ \ k_1)^{\mathrm{T}}$，$AX_2=\beta_2$ 有无穷多解，$X_2=(1\ \ -k_2-1\ \ k_2)^{\mathrm{T}}$，其中 $k_1,\ k_2\in\mathbf{R}$，所以方程 $AX=B$ 有无穷多解

$$X=(X_1,\ X_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -k_1-1 & -k_2-1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2\in\mathbf{R}.$$

四、习题详解

习题 2-1　行列式的定义

1. 求下列全排列的逆序数：

(1) 634521；(2) 53142；(3) 123454321；(4) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$.

解　(1) $\tau(634521)=5+2+2+2+1=12$.

(2) $\tau(53142)=4+2+1=7$.

(3) $\tau(123454321)=1+2+3+4+3+2+1=16$.

(4) $\tau(135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42)=0+1+2+\cdots+(n-1)+(n-1)+\cdots+1+0=n(n-1)$.

2. 用行列式的定义计算 $D_5=\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{13} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35}\\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$.

解　$D_5=(-1)^{\tau(34512)}a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}=(-1)^6a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}=a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}$.

3. 求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & x & 1\\ x & x & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 3x\end{vmatrix}$ 中 x^3 和 x^4 的系数.

解　由 n 阶行列式的定义可知，$f(x)=\sum\limits_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，因而 x^4 只能出现在乘积项

$$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)\cdot 2x\cdot x\cdot x\cdot 3x=-6x^4$$

中，所以 x^4 前的系数是-6.

x^3 只能出现在乘积项

$$(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}=(-1)^2\cdot 1\cdot x\cdot x\cdot 3x=3x^3$$

中，所以 x^3 前的系数是 3.

4. 用对角线法则求下列 3 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&0\\2&3&2\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}2&5&3\\0&4&7\\-2&-2&3\end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\2a&a+b&2b\\a^2&ab&b^2\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&0\\2&3&2\end{vmatrix}=1\times1\times2+2\times0\times2+1\times3\times3-1\times1\times2-0\times3\times1-2\times3\times2=-3.$

(2) $\begin{vmatrix}2&5&3\\0&4&7\\-2&-2&3\end{vmatrix}=2\times4\times3+5\times7\times(-2)+3\times0\times(-2)-3\times4\times(-2)-7\times(-2)\times2-3\times5\times0$

$=24-70+24+28=6.$

(3) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=a\times c\times b+b\times a\times c+c\times b\times a-c\times c\times c-a\times a\times a-b\times b\times b=3abc-a^3-b^3-c^3.$

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\2a&a+b&2b\\a^2&ab&b^2\end{vmatrix}=(a+b)b^2+2ba^2+2aab-(a+b)a^2-2ab^2-2bab$

$=b^3-3ab^2+3a^2b-a^3$

$=(b-a)^3.$

习题 2-2 行列式的性质

1. 求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&4&2\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}2&1&4&3\\4&2&3&11\\3&0&9&2\\1&-1&-1&4\end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix}a&b&b&b\\a&a&b&b\\a&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}$；

(4) $D_n=\begin{vmatrix}2&a&a&\cdots&a\\a&2&a&\cdots&a\\a&a&2&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&2\end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\3&3&3+a&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&4&2\end{vmatrix}=2-6+8-3-8+4=-3.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1\leftrightarrow r_4]{r_2-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -10 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{6}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 15.$$

(3)将第 1 行的−1 倍加到其他行

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_4} \begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)^3.$$

(4)将第 1 行的−1 倍加到其他行，再将第 2 列至第 n 列均加到第 1 列

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a & \cdots & a \\ a & 2 & a & \cdots & a \\ a & a & 2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & a & \cdots & a \\ a-2 & 2-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-2 & 0 & 2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-2 & 0 & 0 & \cdots & 2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-a \end{vmatrix}$$

$$=(2-a)^{n-1}[2+(n-1)a].$$

(5)将第 1 行的$-i$ 倍加到第 i 行，再将第 i 列的 i 倍加到第 1 列

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -3a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+2+\cdots+n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+\frac{(1+n)n}{2}\right]a^{n-1}.$$

2. 利用行列式的性质证明下列等式成立：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-b)(a-c)(b-c)$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$，其中 $a_2a_3\cdots a_n\neq 0$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}=0.$

解　(1)将第 1 列的−1 倍加到其他列

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+(-2)c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2-a^2 & 2b-2a & 0 \\ c^2-a^2 & 2c-2a & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+\left(-\frac{2c-2a}{2b-2a}\right)r_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2-a^2 & 2b-2a & 0 \\ (c-a)(c-b) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=4(a-b)(a-c)(b-c).$$

(2)将第 i 列的 $-\dfrac{1}{a_i}$ 倍加到第 1 列 $(i=2,3,\cdots,n)$，

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$=0.$

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=3$，求 $|3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^2|$.

解 $|3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^2|=3^3|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^2|=3^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^2=972.$

4. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶，n 阶可逆阵，证明分块矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$均可逆，并求 $\boldsymbol{M}^{-1}$，$\boldsymbol{D}^{-1}$，$\boldsymbol{N}^{-1}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为可逆阵，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$. 于是

$$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|\neq 0,$$

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\neq 0.$$

$$|\boldsymbol{N}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|\neq 0,$$

所以分块矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{N}$ 均可逆.

设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$的逆矩阵为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$，则由

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_4 \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{E}_1, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{E}_2, \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}X_3=A^{-1}E_1=A^{-1},\\X_4=A^{-1}\cdot O=O,\\X_1=B^{-1}\cdot O=O,\\X_2=B^{-1}E_2=B^{-1},\end{cases}$$

即 $M=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

设矩阵 $D=\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $X=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}$，则由

$\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1&O\\O&E_2\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}AX_1&AX_2\\CX_1+BX_3&CX_2+BX_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1&O\\O&E_2\end{pmatrix}$ 得

$$\begin{cases}AX_1=E_1,\\AX_2=O,\\CX_1+BX_3=O,\\CX_2+BX_4=E_2,\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}X_1=A^{-1}\cdot E_1=A^{-1},\\X_2=A^{-1}\cdot O=O,\\X_3=-B^{-1}CX_1=-B^{-1}CA^{-1},\\X_4=B^{-1}E_2=B^{-1},\end{cases}$$

即 $D=\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$.

设 $N=\begin{pmatrix}O&A\\B&C\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $X=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}$，则由

$\begin{pmatrix}O&A\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1&O\\O&E_2\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}AX_3&AX_4\\BX_1+CX_3&BX_2+CX_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1&O\\O&E_2\end{pmatrix}$ 得

$$\begin{cases}AX_3=E_1,\\AX_4=O,\\BX_1+CX_3=O,\\BX_2+CX_4=E_2,\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}X_3=A^{-1}\cdot E_1=A^{-1},\\ X_4=A^{-1}\cdot O=O,\\ X_1=-B^{-1}CX_3=-B^{-1}CA^{-1},\\ X_2=B^{-1}E_2=B^{-1},\end{cases}$$

即 $N=\begin{pmatrix}O & A\\ B & C\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}O & A\\ B & C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$.

5. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明矩阵 A 和 $A+2E$ 均可逆，并求 A^{-1} 和 $(A+2E)^{-1}$.

证明

$$A^2-A-2E=O,$$
$$A(A-E)-2E=O,$$
$$A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E,$$

由第二章第二节推论 4 得，A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又由 $A^2-A-2E=O$，得 $A^2+2A-3A-2E=O$，即 $A(A+2E)-3(A+2E)+4E=O$.

所以 $(A-3E)(A+2E)=-4E$，即 $\frac{1}{4}(3E-A)(A+2E)=E$，所以 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

习题 2-3　行列式按行(列)展开

1. 设函数 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\end{vmatrix}$，求方程 $f(x)=0$ 的根.

解 $\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x & a & b & c\\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2\\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)=0$，

$f(x)=0$ 的根为 $x=a$，或 $x=b$，或 $x=c$.

2. 求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 4\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2行展开}} -3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_2]{c_1+c_2} -3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第2行展开}} (-3)(-1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_4+c_1 \\ c_3-c_1}]{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1行展开}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_3+c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2行展开}} (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9.$

(3) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1行展开}} x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a_0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

$= x(a_3x^2+a_1-a_2x)-a_0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix}$

$= a_3x^3-a_2x^2+a_1x-a_0.$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3+(-1)c_1 \\ c_4+c_1}]{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x+1 & x & -x & x \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第1行展开}} \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & -x & x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \\ x+1 & x & -x \end{vmatrix}$

$= -x^3-x[-x^2+x^2-x^2(x+1)]$

$= x^4.$

3. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1列展开}} x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}\begin{vmatrix} a_1+a_2+\cdots+a_n+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i+b\right).$$

(4)

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+\frac{1}{i}c_i}\begin{vmatrix} x+1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\cdots+\frac{1}{n}x & x & x & \cdots & x \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\ x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+n!.$$

(5)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!.$$

习题 2-4　矩阵求逆公式与克莱姆法则

1. 用克莱姆法则求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2+4x_3=2, \\ 2x_1-4x_2+3x_3=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2-2x_3=4, \\ -2x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$

解　(1) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$

因而方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-6r_2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -43 \end{vmatrix}=-43,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&2&4\\2&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&0&8\\0&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&3&-1\\0&0&8\end{vmatrix}=-24,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-1\\-2&3&2\\2&-4&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&-1&0\\0&0&3\end{vmatrix}=-3.$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|}=-43,\ x_2=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|}=-24,\ x_3=\frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|}=-3.$$

(2) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\-2&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&-3&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&0&1\end{vmatrix}=3\neq 0,$

因而方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\4&1&-2\\1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&1&2\\4&1&-2\\-2&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+2r_1]{r_2-4r_1}\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-3&-10\\0&0&5\end{vmatrix}=15,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&4&-2\\-2&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&6&-3\\0&-3&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&-3&4\\0&6&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+2r_2}-\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&-3&4\\0&0&5\end{vmatrix}=15,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&1&4\\-2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&3&6\\0&-3&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&3&6\\0&0&3\end{vmatrix}=9.$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|}=5,\ x_2=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|}=5,\ x_3=\frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|}=3.$$

2. 已知二次曲线 $f(x)=a+bx+cx^2$ 在点 $x=1$，$x=2$，$x=3$ 处的值为 $f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=-2$，试确定这条二次曲线.

解 将点(1, 2)，(2, 3)，(3, −2)代入方程得到

$$\begin{cases}a+b+c=2,\\a+2b+4c=3,\\a+3b+9c=-2.\end{cases}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

因此上述方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&4\\-2&3&9\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&4\\3&-2&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}-\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\0&-8&6\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-8r_2}-\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\0&0&-10\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&4\\1&-2&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&-4&8\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&0&20\end{vmatrix}=20,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&2&-4\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-6\end{vmatrix}=-6.$$

因此

$$a=\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|}=-5,\ b=\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|}=10,\ c=\frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|}=-3.$$

3. 用求逆公式求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-\frac{3}{2}r_2}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1\neq0,$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}.$$

4. 问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1-\ x_2+2x_3=-4,\\x_1+\ x_2+\lambda x_3=4,\\-x_1+\lambda x_2+\ x_3=\lambda^2\end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？有无穷多解时，求其解.

解

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&\lambda\\-1&\lambda&1\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&\lambda-2\\0&\lambda-1&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&\lambda-2\\\lambda-1&3\end{vmatrix}=(-\lambda+4)(\lambda+1).$$

当 $\lambda\neq4$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，$|A|\neq0$，由克莱姆法则知方程组有唯一解.

当 $\lambda=-1$ 时

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\1&1&\lambda&4\\-1&\lambda&1&\lambda^2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&2&-3&8\\0&-2&3&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&2&-3&8\\0&0&0&5\end{array}\right),$$

此时方程无解.

当 $\lambda=4$ 时

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\1&1&\lambda&4\\-1&\lambda&1&\lambda^2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\1&1&4&4\\-1&4&1&16\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&3&3&12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{3}]{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-4\\0&1&1&4\\0&1&1&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+3x_3=0,\\x_2+x_3=4,\end{cases}$$

移项，得原方程组解为

$$\begin{cases}x_1=-3C,\\x_2=4-C,\\x_3=C,\end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明：

(1)若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明 (1)如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，于是由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 知 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

如果 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=0$，假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$，由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\cdot\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾，故 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，$|\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}|^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，由(1)得，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=0$ 仍成立. 所以对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

6. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，并求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

证明 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

从而由习题 5 可知，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

再由 $\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}^*\cdot\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}$.

测试题二

一、填空题

1. 排列 35214 与 41253 的逆序数之和为________.

解 $\tau(35214)+\tau(41253)=(2+3+1)+(3+1)=10$.

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}=$________.

解 $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 2a & 3a+2b \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^3.$$

3. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$，则 $-A_{12}-A_{22}+A_{32}+3A_{42}=$________.

解 $$-A_{12}-A_{22}+A_{32}+3A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2+3r_4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\0&1&-1&2\\0&0&2&5\\0&0&0&11\end{vmatrix}=22.$$

4. 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=$________.

解 $D\xlongequal[i=2,3,4,5]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}1&a&0&0&0\\0&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\-a&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}-$

$$a\begin{vmatrix}a&0&0&0\\1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\end{vmatrix}\text{(对第 1 个行列式做运算 } c_1+c_i\text{，}i=2\text{，}3\text{，}4\text{)}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\-a&0&-1&1-a\end{vmatrix}-a^5\text{(将第 1 个行列式按第 1 列展开)}$$

$$=\begin{vmatrix}1-a&a&0\\-1&1-a&a\\0&-1&1-a\end{vmatrix}+(-a)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1-a&a&0\\-1&1-a&a\end{vmatrix}-a^5$$

$$=(1-a)^3+2a(1-a)+a^4-a^5$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 因为 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{E}|=4$，又 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}=2$，所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

二、选择题

1. 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 行展开}} a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$=a_1a_2a_3a_4-a_1a_4b_2b_3+b_1b_2b_3b_4-b_1b_4a_2a_3$$
$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4),$$

所以选 D.

2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$(　　).

A. $m-n$　　B. $n-m$　　C. $m+n$　　D. $-(m+n)$

解 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|=-m$，$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=n$，所以

$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=n-m$，所以选 B.

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，$|\boldsymbol{B}|=-2$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

解 由 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$，于是 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=|2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{B}|^{-1}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，所以选 B.

4. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$(　　).

A. 2　　B. -2　　C. 3　　D. -3

解 因为

$$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})|=|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}\cdot|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}|=2,$$

所以

$$|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}|=2\cdot|\boldsymbol{A}|=6,$$

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|^{-1}=6\times\frac{1}{2}=3,$$

所以选 C.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 3 维列向量，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{B}|=(\quad)$.

A. 2　　B. −2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

解　$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3\quad 2\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal{c_3-2c_2}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3\quad 2\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal[c_1-\frac{1}{2}c_3]{c_2-\frac{3}{2}c_3}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad 2\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal{c_1-c_2}|\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad 2\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{A}|$$

$=2$,

所以选 A.

三、解答题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，求行列式 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$ 的值.

解　$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 0\quad -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2.$

所以

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1\quad 0\quad -1)=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}a\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&a-2^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=a(a-2^{n-1})^2-a2^{2n-2}=a^2(a-2^n).$$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零实矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，证明 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

解　假设 $|\boldsymbol{A}|=0$，则由 $\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 及 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.
设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}\quad(j=1,2,\cdots,n)$. 则

$$A^{T}\cdot A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{T}\\ \alpha_2^{T}\\ \vdots\\ \alpha_n^{T}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{T}\alpha_1 & \alpha_1^{T}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{T}\alpha_n\\ \alpha_2^{T}\alpha_1 & \alpha_2^{T}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{T}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_n^{T}\alpha_1 & \alpha_n^{T}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{T}\alpha_n\end{pmatrix}.$$

由 $\alpha_j^{T}\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{nj}^2=0\ (j=1,2,\cdots,n)$，且 a_{ij} 是实数，得 $a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{nj}=0\ (j=1,2,\cdots,n)$，即 $A=O$，与已知矛盾，所以 $|A|\neq 0$.

3. 设 A，B 为 2 阶方阵，A^*，B^* 分别是 A，B 的伴随矩阵，若 $|A|=3$，$|B|=2$，求分块矩阵 $\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解 因为 $|A|=3\neq 0$，$|B|=2\neq 0$，所以 $\begin{vmatrix}O & A\\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}B & O\\ O & A\end{vmatrix}=|B|\cdot|A|=6\neq 0$，从而 $\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}$ 可逆.

由习题 2–2 第 4 题，$\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$. 因此，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}^{*}&=\begin{vmatrix}O & A\\ B & O\end{vmatrix}\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}^{-1}=|B|\cdot|A|\cdot\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}O & |A|\,|B|B^{-1}\\ |B|\,|A|A^{-1} & O\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}O & |A|B^{*}\\ |B|A^{*} & O\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}O & 3B^{*}\\ 2A^{*} & O\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. 设 A，B，$A+B$，$A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$.

解 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1})^{-1}=(B^{-1}(B+A)A^{-1})^{-1}=(B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$

5. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，求矩阵$X$.

解 在等式两端同时左乘矩阵A，

$$AA^*X=AA^{-1}+2AX,$$

$$|A|X=E+2AX,$$

$$(|A|E-2A)X=E,$$

由于

$$||A|E-2A|=\begin{vmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{vmatrix}=32\neq0,$$

所以$|A|E-2A$可逆，且由

$$(||A|E-2A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\0&4&-4&-1&1&0\\0&0&4&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{4}]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\0&4&0&0&1&1\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{4}\\r_1\times\frac{1}{2}}]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right),$$

得

$$X=(|A|E-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

6. 当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时求其解.

解 $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+r_2}-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

由克莱姆法则知，当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时有唯一解.

当 $\lambda=-2$ 时，

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时，

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

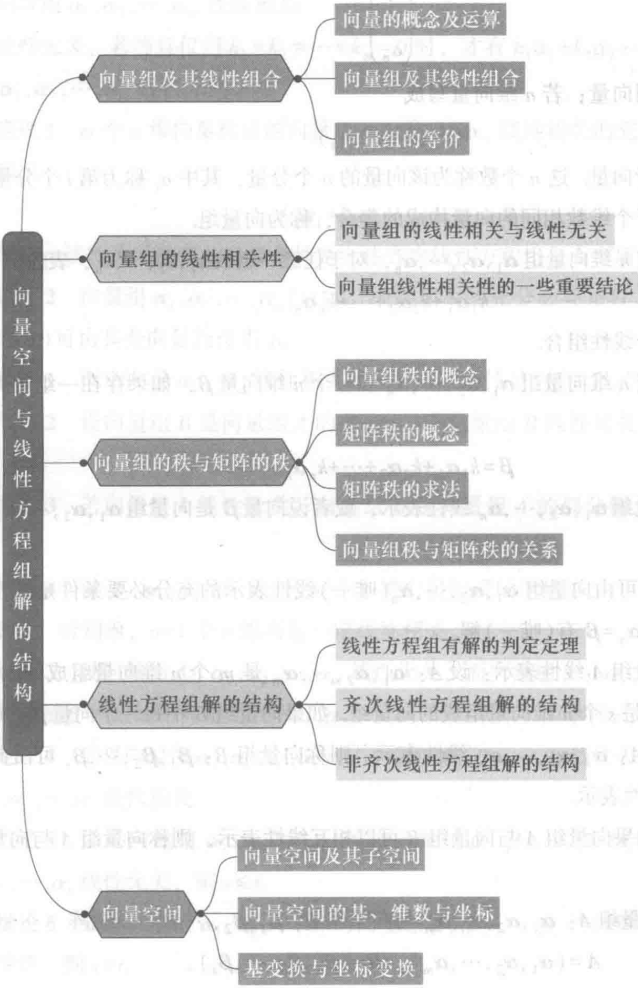
方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-2-C_1-C_2,\\ x_2=C_1,\\ x_3=C_2,\end{cases}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

第三章　向量空间与线性方程组解的结构

一、知识结构



向量空间与线性方程组解的结构

二、归纳总结

1. 向量组及其线性组合

n 维向量：由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组称为 n 维向量. 若 n 维向量写成

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的形式，称为 n 维列向量；若 n 维向量写成

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

的形式，称为 n 维行向量. 这 n 个数称为该向量的 n 个分量，其中 a_i 称为第 i 个分量.

向量组：由若干个维数相同的向量构成的集合，称为向量组.

线性组合：给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，对于任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，表达式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

称为该向量组的一个线性组合.

线性表示：给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，或者说向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个线性组合.

定理 1 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$(唯一)线性表示的充分必要条件是线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 有(唯一)解.

向量组 B 由向量组 A 线性表示：设 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量组成的向量组，而 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 s 个 n 维向量组成的向量组. 如果向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,s)$ 均可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则称向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

向量组等价：如果向量组 A 与向量组 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 与向量组 B 等价.

定理 2 设有向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$. 令矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),$$

则向量组 B 可由向量组 A 线性表示的充分必要条件是矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$$

有解. 向量组 A 与向量组 B 等价的充分必要条件是矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \text{ 与 } \boldsymbol{BY}=\boldsymbol{A}$$

同时有解.

2. 向量组的线性相关性

线性相关：设有 m 个 n 维向量构成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

线性无关：若当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

定理 1 m 个 n 维向量构成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

有非零解；线性无关的充分必要条件是上述齐次线性方程组只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是存在某一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ 可由其余向量线性表示.

推论 1 两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关的充分必要条件是它们的分量对应成比例.

推论 2 设向量组 B 是向量组 A 的部分组. 若向量组 B 线性相关，则向量组 A 也线性相关.

推论 3 若向量组 A 线性无关，向量组 B 是向量组 A 的部分组，则向量组 B 也线性无关.

推论 4 设 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量组成的向量组，当 $n<m$ 时该向量组一定线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

定理 3 设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 A'：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 一定能由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式是唯一的.

定理 4 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，并且 $s>t$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

推论 5 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，并且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $s\leqslant t$.

推论 6 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 均线性无关，并且这两个向量组等价，则 $s=t$.

3. 向量组的秩与矩阵的秩

向量组的极大无关组定义如下.

设 A 是一个 n 维向量组(它可以包含无限多个向量),如果在 A 中取出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足条件:

(1)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(2)对于 A 中任意的向量 $\boldsymbol{\beta}$,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 A 的一个极大线性无关组,简称极大无关组.

向量组的秩:向量组 A 的任意一个极大无关组所含向量的个数,称为这个向量组的秩,记为 R_A.

定理 1 等价的向量组有相同的秩.

k 阶子式:在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,任取 k 行与 k 列($k\leqslant m$,$k\leqslant n$),位于这些行列交叉处的 k^2 个元素,不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式.

矩阵的秩:设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D,且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于 0,那么 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式,数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记作 $R(\boldsymbol{A})$.并规定,零矩阵的秩等于 0.

定理 2 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩,即若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

定理 3 矩阵的行向量组的秩与它的列向量组的秩相等,都等于矩阵的秩.

4. 线性方程组解的结构

定理 1 设有 n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$,则

(1)该线性方程组无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$;

(2)该线性方程组有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$,且当 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=n$ 时有唯一解,当 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时有无穷多解.

定理 2 设有 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$,则

(1)该线性方程组只有零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$;

(2)该线性方程组有非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=r<n$.

定理 3　矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$.

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的性质如下.

性质 1　设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意的两个解，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 仍为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

性质 2　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意解，则对任意实数 k, $k\boldsymbol{\alpha}$ 仍为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量的性质如下.

性质 3　设 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意两个解，则 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

性质 4　设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意解，$\boldsymbol{\eta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意解，则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

定理 4　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 一定有基础解系，并且基础解系中所含向量的个数为 $n-r$，从而解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

定理 5　如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 任意给定的一个解(通常称为特解)，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可以表示为：$x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意实数.

5. 向量空间

向量空间：设 V 是 n 维向量的集合，且 V 非空，如果 V 对向量的加法和数乘两种运算都封闭，则称集合 V 为向量空间.

子空间：设有向量空间 V_1 与 V_2，如果 $V_1\subseteq V_2$(即 V_1 是 V_2 的子集)，则称向量空间 V_1 是 V_2 的子空间.

向量空间的基与维数定义如下.

向量空间 V 中的 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 如果满足下列条件：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2)向量空间 V 中任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 V 的一个基. 数 r 称为向量空间的维数，记为 $\dim(V)=r$，并称 V 为 r 维向量空间.

向量在基下的坐标：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基，如果 V 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一线性表示为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_r\boldsymbol{\alpha}_r$，则称常数 $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_r$ 为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

过渡矩阵：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间 V 的两个基，存在系数矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$，使得 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$. 矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$ 称为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

坐标变换公式：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的两个基，任一向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，且矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

称为从坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$到坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$的坐标变换公式；

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

称为从坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$到坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$的坐标变换公式.

三、典型例题

例 1 设矩阵$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}$等价，则$a=$______.

解 由于等价的矩阵具有相同的秩，而由

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可知，这两个矩阵的秩为 2，所以由

$$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-a\\0&a-1&1-a\\0&0&a^2+a-2\end{pmatrix}$$

得$a^2+a-2=0$，且$a-1\neq0$，即$a=-2$.

例 2 【单选题】n 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充分必要条件为（　　）.

A. 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量均线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

解 A、B、C 均只是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的必要条件，而非充分条件，所以答案为 D.

例 3 （**考研真题** 2013 年数学二第 7 题）【单选题】设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则(　　).

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

微课视频

解 将矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 按列分块，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，故 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，即

$$\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,\ \boldsymbol{\gamma}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

即 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

由于 $\boldsymbol{B}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示，故选 B.

例 4 （**考研真题** 2014 年数学二第 8 题）【单选题】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k，l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　).

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

微课视频

解 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，设 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，即 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1 k+\lambda_2 l)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，于是 $\lambda_1=\lambda_2=0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 从而是必要条件.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则对任意常数 k，l，$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，但是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，因此不是充分条件. 所以答案为 A.

例 5 （**考研真题** 2012 年数学二第 7 题）【单选题】设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1，c_2，c_3，c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解 n 个 n 维向量线性相关的充分必要条件为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$（由教材第三章第二节的定理 1 以及克莱姆法则即得）. 显然，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$，所以答案为 C.

微课视频

例 6 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\b\\1\end{pmatrix}$，问：

(1)a，b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(2)a，b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出此表示式.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})$做初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&b\\2&3&a&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&b-2\\0&1&a-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&b-3\end{array}\right),$$

所以

(1)当 $b\neq3$ 时，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 无解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2)①当 $b=3$ 且 $a\neq0$ 时，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&b-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

知，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示，表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3.$$

②当 $b=3$ 且 $a=0$ 时，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&a&0\\0&0&0&b-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

知，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解

$$\begin{cases}x_1=2-3c,\\x_2=-1+2c,\ c\text{ 为任意常数}.\\x_3=c,\end{cases}$$

从而 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式不唯一，即

$$\boldsymbol{\beta}=(2-3c)\boldsymbol{\alpha}_1+(-1+2c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3,\ c\text{ 为任意常数}.$$

例 7　(**考研真题**　2005 年数学二第 22 题) 确定常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ a,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 1,\ a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,\ a,\ 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,\ a,\ a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，方程 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$ 有解，于是 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，方程 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{B}$ 无解，于是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$，从而有 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{B})$. 又 $R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，所以 $R(\boldsymbol{A})<3$，从而行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0,$$

得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示. 但是 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,\ 1,\ 4)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，由

$$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&-6&0&3&-3\\0&0&0&0&-3&3\end{array}\right)$$

可知，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 无解，即 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以 $a=-2$ 不符合题意，舍去. 综上得 $a=1$.

例 8　(**考研真题**　2017 年数学一第 13 题) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为______.

解　记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 为初等矩阵. 故

$$R(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=R(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3))=R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s)=R(\boldsymbol{A}).$$

再由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 得 $R(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=2$.

例 9　证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证明　记 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n).$$

令 $R(\boldsymbol{A})=s$，$R(\boldsymbol{B})=t$，并设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的极大无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 线性表示，从而可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$，

微课视频

$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$线性表示. 同理，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$, $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示. 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$, $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示，从而由习题 3-3 第 7 题得

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t})\leqslant s+t=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$$

（向量组的秩不会超过该向量组所含向量的个数），

即

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

例 10 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n$.

微课视频

证明 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$. 由习题3-4 第7题，$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant n$. 又由例 9，可得

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant R(2\boldsymbol{E})=n,\text{ 所以}$$

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n.$$

例 11 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})=n$.

证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，由习题 3-4 第 7 题得

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})\leqslant n.$$

又由例 9 可得

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A})\geqslant R[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}]=R(\boldsymbol{E})=n,$$

所以

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})=n.$$

例 12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，证明：$R(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

微课视频

证明 （充分性）$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，所以 $R(\boldsymbol{\alpha})=1$，而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，由习题 3-3 第 8 题可得

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha})=1.$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 非零知矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，从而 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，所以 $R(\boldsymbol{A})=1$.

（必要性）若 $R(\boldsymbol{A})=1$，则存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{O}_{1\times(n-1)}\\ \boldsymbol{O}_{(n-1)\times 1} & \boldsymbol{O}_{(n-1)\times(n-1)}\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{O}_{1\times(n-1)}\\ \boldsymbol{O}_{(n-1)\times 1} & \boldsymbol{O}_{(n-1)\times(n-1)}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1,0,\cdots,0)\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1,0,\cdots,0)\boldsymbol{Q}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

例 13　(**考研真题**　2015 年数学一第 5 题)【单选题】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　).

A. $a\notin\Omega$，$d\notin\Omega$　B. $a\notin\Omega$，$d\in\Omega$　C. $a\in\Omega$，$d\notin\Omega$　D. $a\in\Omega$，$d\in\Omega$

解　$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{array}\right),$$

由 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$. 所以答案为 D.

例 14　(**考研真题**　2000 年数学一第 4 题)已知方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$______.

解　方程组无解的充分必要条件是系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩，故先对增广矩阵作初等行变换. 由于

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right),$$

因此当 $a^2-2a-3=(a-3)(a+1)=0$ 且 $a-3\neq0$ 时，即当 $a=-1$ 时，系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，而增广矩阵的秩 $R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，从而方程组无解. 所以答案为 $a=-1$.

例 15　(**考研真题**　2015 年数学一第 20 题)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1)证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

(2)当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

微课视频

证明 (1)由已知条件知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}.$$

而 $\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$，从而矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$ 可逆，于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(2)由题设知，$\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标均为 k_1，k_2，k_3，即

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,\ k_i\neq0(i=1,\ 2,\ 3).$$

即

$$k_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$
$$k_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$
$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$$

有非零解. 而该方程组有非零解的充分必要条件为系数行列式等于零，即

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3\right|=\left|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\right|\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\right|\cdot(-k)=0,$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\left|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\right|\neq0$，所以得 $k=0$. 于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，即 $(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，得 $k_1+k_3=0$，$k_2=0$. 因而所求的非零向量为

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_3,\ k_1\neq0.$$

例 16 (**考研真题** 2011 年数学一第 6 题)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系可为(　　).

微课视频

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解 本题没有给出具体的方程组，所以求解应当从解的结构、系数矩阵的秩开始.

因为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系只含有一个解向量，即 $n-R(\boldsymbol{A})=4-R(\boldsymbol{A})=1$，所以 $R(\boldsymbol{A})=4-1=3$. 由第三章习题 3-4 第 8 题，$R(\boldsymbol{A}^*)=1$，于是 $n-R(\boldsymbol{A}^*)=4-1=3$，即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系应该含有 3 个线性无关的解向量. 所以选项 A、B 错. 再由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的

列向量全是 $A^*x=0$ 的解，且 A 的列向量中必有 3 个是线性无关的. 由 $(1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的解，得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性相关，所以选项 C 错误，因而正确答案为 D.

例 17　（**考研真题**　2018 年数学一第 21 题）已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，(1) 求 a；(2) 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P.

解　(1) 由题设可知，矩阵 A 与 B 列等价，从而有相同的秩. 对矩阵 A 与 B 分别作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3a\\0&1&-a\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix},$$

得 $R(B)=R(A)=2$，从而 $a=2$.

(2) 所求矩阵 P 是方程 $AX=B$ 的解. 记 $X=(X_1,X_2,X_3)$，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $AX_i=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 有解. 由 (1) 知 $a=2$，对矩阵 $(A\mid B)$ 作初等行变换得

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是 $AX_i=\mathbf{0}(i=1,2,3)$ 有基础解系 $\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$，且 $A\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_1$，$A\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_2$，$A\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_3$，从而 $AX_i=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 的通解分别为

$$X_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-6k_1\\-1+2k_1\\k_1\end{pmatrix},\quad X_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-6k_2\\-1+2k_2\\k_2\end{pmatrix},$$

$$X_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-6k_3\\-1+2k_3\\k_3\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2,\ k_3\text{ 为任意常数.}$$

即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2,\ k_3\text{ 为任意常数.}$$

由于 $|\boldsymbol{X}|=k_3-k_2$，所以满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2,\ k_3\text{ 为任意常数，且 }k_2\neq k_3.$$

四、习题详解

习题 3-1　向量组及其线性组合

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$，求 $2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$.

解
$$2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，问：向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示？

解　令 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3$，由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\mid\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\1&1&-1&2\\1&-1&0&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-2&1\\0&-1&-1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right),$$

可得方程组有唯一解

$$k_1=2,\ k_2=-1,\ k_3=-1,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，且表示式为

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3.$$

3. 设 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}.\end{cases}$ 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证明　由已知条件得向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix},$$

将上式记为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K},$$

由于

$$|\boldsymbol{K}|=(-1)^{n-1}(n-1)\neq0,$$

所以 $\boldsymbol{K}$ 可逆，从而有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^{-1}$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，故向量组等价.

4. 设有向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 和向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix}$，确定常数 a，使得向量组 A 能由向量组 B 线性表示，但是向量组 B 不能由向量组 A 线性表示.

解　因为向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{X}$ 有解. 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\mid\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-ar_1]{r_2-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&2a+4&3a&0&1-a&1-a^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&3-3a&-(a-1)^2\end{array}\right)$$

可知，当 $a+2\neq0$ 且 $a-4\neq0$ 时，矩阵方程$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{X}$有解. 即当 $a\neq-2$ 且 $a\neq4$ 时，向量组 A 可由向量组 B 线性表示.

向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以矩阵方程$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}$无解. 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-ar_1]{r_2-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&0&2a+4&3a\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&3a+6&4a+2\end{array}\right)$$

可知，当 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$ 时，矩阵方程$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}$无解. 即当 $a=1$ 或 $a=-2$ 时，向量组 B 不能由向量组 A 线性表示.

综上所述，当 $a=1$ 时，向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，但向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

5. 证明向量组的等价具有传递性，即：若向量组 A 与向量组 B 等价，向量组 B 与向量组 C 等价，则向量组 A 与向量组 C 等价.

证明 设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，向量组 C：$\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$，并记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s)$. 由向量组 A 与向量组 B 等价，可知这两个向量组可以互相线性表示，用矩阵语言来说，即存在矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BM}$，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AN}$，同理，存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{CP}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BQ}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BM}=(\boldsymbol{CP})\cdot\boldsymbol{M}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PM})$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BQ}=(\boldsymbol{AN})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{NQ})$，即向量组 A 与向量组 C 可以互相线性表示，所以向量组 A 与向量组 C 等价.

习题 3-2　向量组的线性相关性

1. 判断下列命题是否正确，正确的给予证明，错误的给出反例：

(1)若非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一个向量均不能由其余向量线性表示，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(2)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由其余向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示；

(3)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 也线性无关；

(4)如果有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关；

(5)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0} \text{ 与 } k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$$

同时成立；

(6)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也是线性无关的.

解　(1)正确.

证明如下.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

不妨设 $k_1\neq0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

与条件矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(2)错误.

反例如下.

若

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示.

(3)正确.

证明如下.

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0},$$

若 $k_4\neq0$，则

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{k_1}{k_4}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_4}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_4}\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_1,$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，所以 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，这与已知条件矛盾. 那么 $k_4=0$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，得

$$k_1=k_2=k_3=0.$$

综上

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0,$$

得证.

(4)错误.

反例如下.

$$设\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=0$，其中 $k_1=k_2=k_3=1$，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

(5)错误.

反例如下.

$$设\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

则 $k_1=0$，$k_2\neq0$，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，但 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2\neq\mathbf{0}$.

(6)错误.

反例如下.

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均线性无关，但由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

2. 判断下列向量组是线性相关还是线性无关：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}6\\12\\10\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}9\\11\\12\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_4=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}$.

解　(1) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由系数矩阵行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&1&3\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

知 $k_1=k_2=k_3=0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 由于 $\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\beta}_2$，于是有 $0\cdot\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

(3) 由第三章第二节推论 4 可知，4 个 3 维向量必定线性相关. 即 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 线性相关.

3. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是线性相关的.

证明　由于 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，易知 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4$，于是 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4=\mathbf{0}$.

因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

4. 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix},$$

当 a 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？当 a 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？

解　设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&a&2\\-1&2&a\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&a+2&a+2\\0&1-a&-2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a+2&a+2\\1-a&-2\end{vmatrix}=(a+2)(a-3).$$

当 $a=3$ 或 $a=-2$ 时，方程组有非零解，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

当 $a\neq 3$ 且 $a\neq -2$ 时，方程组只有零解，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$，讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的线性相关性.

解　设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0},$$

$$(k_1+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关得齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_m+k_1=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\\\quad\vdots\\k_{m-1}+k_m=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{m-1},$$

若 m 为偶数，行列式等于 0，线性方程组有非零解，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关. 若 m 为奇数，行列式等于 2，线性方程组只有零解 $k_1=\cdots=k_m=0$，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，证明：它们线性无关的充分必要条件是任意一个 n 维向量都可以由它们线性表示.

证明 （充分性）任何 n 维向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，从而 n 维向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 另一方面，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 等价，从而有相同的秩，由 $R(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=n$ 得 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

（必要性）由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，对任一 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，$n+1$ 个 n 维向量构成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 必定线性相关，从而由教材第三章第二节定理 3 可知，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

习题 3-3 向量组的秩与矩阵的秩

1. 求下列向量组的秩及一个极大无关组，并将不属于极大无关组的向量由极大无关组线性表示：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\4\\-8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$.

解　(1)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&2&-3&4&5\\1&2&-9&-8&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-1&6&7&2\\0&1&-6&-7&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_2\times(-1)}]{r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&6&3\\0&1&-6&-7&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量组的秩是 2，极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$.

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4=6\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_5=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

$$(2)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\1&-1&4&1&0\\0&3&-1&2&3\\2&-1&5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\0&-2&2&0&-2\\0&3&-1&2&3\\0&-3&1&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\0&1&-1&0&1\\0&3&-1&2&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量组的秩是 3，极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

2. 求下列矩阵的秩：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&3&2&2\\3&1&-4&4\end{pmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\2&1&3&-1&1\\1&2&0&6&-2\\4&3&5&-1&-3\end{pmatrix}$.

解　(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&3&2&2\\3&1&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&4&2&3\\0&4&-4&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&4&2&3\\0&0&-6&4\end{pmatrix}$,

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 3.

$$(2)\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\2&1&3&-1&1\\1&2&0&6&-2\\4&3&5&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-3&3\\0&1&-1&5&-1\\0&-1&1&-5&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&0&0&2&2\\0&1&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-1\\0&0&0&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩是 3.

3. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，证明：$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证明 因为 $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶可逆矩阵，根据教材第一章第四节定理 1，存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$ 以及 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$，所以由 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经由若干次初等变换得到的. 由教材第三章第三节定理 3，初等变换不改变矩阵的秩，所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

4. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，那么 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{B})$ 会有怎样的关系？

解 设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，划去第 k 行，则 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{a}_{k-1},\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m.$$

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1},\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

(2)若 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1},\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1},\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 极大无关组加上 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 构成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})+1$.

5. 已知向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩 $R_A=3$，向量组 B：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩 $R_B=4$，证明：向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩 $R_C=4$.

证明 因为向量组 B 的秩 $R_B=4$，所以向量组 B：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关. 从而根据教材第三章第二节推论 3，向量组 B 的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关，向量组 A 的秩 $R_A=3$，所以向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，于是由教材第三章第二节定理 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示. 因此向量组 C：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩 $R_C=4$.

6. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩相等.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，则有

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}=AQ.$$

由

$$|Q|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}r-1&r-1&r-1&\cdots&r-1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(r-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=(r-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{r-1}(r-1)\neq 0$$

知矩阵 Q 可逆，于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=A=BQ^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}^{-1},$$

因此向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价，从而秩相等.

7. 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，证明 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$.

微课视频

证明　设两向量组的秩分别为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=l$ 和 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=k$，极大无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_l}$ 以及 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}$. 由于向量组与它的极大无关组等价，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，于是向量组 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_l}$ 线性表示. 又向量组 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}$ 线性无关，所以由教材第三章第二节推论 5，$k\leqslant l$. 即 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$.

8. 设矩阵 A、B、C 满足 $AB=C$，证明 $R(C)\leqslant\min\{R(A),\ R(B)\}$.

证明　设 $A_{m\times t}B_{t\times n}=C_{m\times n}$，矩阵 C 的列向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，矩阵 A 的列向量组为

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 可知，$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，由第 7 题，$R(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$. 而 $R(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)=R(\boldsymbol{C})$，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=R(\boldsymbol{A})$，所以 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A})$. 又 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，同理可证 $R(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$. 由 $R(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{C})$，$R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{B})$，得 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{B})$. 综上，有 $R(\boldsymbol{C})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

9. 证明矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 的秩满足不等式 $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

微课视频

证明 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式总是矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的非零子式，所以 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 同理，有 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 两式合起来，即为 $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，列向量组的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，列向量组的极大无关组为 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 线性表示，从而可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示. 同理，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示. 因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示. 由第 7 题知，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\beta_{j_t})$. 而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，$R(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t})\leqslant s+t$（即向量组的秩不会超过该向量组所含向量的个数），所以有 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant s+t=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$. 综上，$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

习题 3-4　线性方程组解的结构

1. 求下列齐次线性方程组的通解（用基础解系表示）：

$$(1)\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-2x_4=0,\\ x_2+x_3+2x_4=0,\\ 2x_1-x_2+5x_3-2x_4=0;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x_1-3x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3+2x_4=0,\\ 5x_1-7x_2-3x_3+5x_4=0.\end{cases}$$

解 (1)系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&1&2\\2&-1&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

自由未知量为 x_3，x_4，于是有 $\begin{cases}x_1=-3x_3,\\ x_2=-x_3-2x_4,\end{cases}$ 依次取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

代入原方程组可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2, \ k_1, \ k_2 \in \mathbf{R}.$$

(2)系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-8r_2]{r_1+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由未知量为 x_3，x_4，于是有 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$ 依次取

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

代入原方程组可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2, \ k_1, \ k_2 \in \mathbf{R}.$$

2. 求下列非齐次线性方程组的通解(要求写出导出组的基础解系)：

(1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 7x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

解 (1)增广矩阵

$$\begin{pmatrix}1&4&-3&4&\vline&-2\\2&1&1&1&\vline&3\\3&-2&5&-2&\vline&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&4&-3&4&\vline&-2\\0&-7&7&-7&\vline&7\\0&-14&14&-14&\vline&14\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{7}\right)]{r_3-2r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-3&4&\vline&-2\\0&1&-1&1&\vline&-1\\0&0&0&0&\vline&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&\vline&2\\0&1&-1&1&\vline&-1\\0&0&0&0&\vline&0\end{pmatrix}$$

自由未知量为 x_3，x_4，于是有$\begin{cases}x_1=-x_3+2,\\x_2=x_3-x_4-1,\end{cases}$ 令

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$

于是得原方程一个特解

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

方程组的导出组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=x_3-x_4,\end{cases}$$

取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},\ k_1,\ k_2 \text{ 为任意常数}.$$

(2)增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&-1&1\\1&3&-9&-7&1\\3&1&-3&3&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&-1&1\\0&2&-6&-6&0\\0&-2&6&6&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_3+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&-1&1\\0&1&-3&-3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&1\\0&1&-3&-3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

自由未知量为 x_3，x_4，于是有$\begin{cases}x_1=-2x_4+1,\\x_2=3x_3+3x_4,\end{cases}$令

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

可得原方程一个特解

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

导出组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_4,\\x_2=3x_3+3x_4,\end{cases}$$

取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},\ k_1,\ k_2\text{ 为任意常数}.$$

3. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：(1)$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关；(2)$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

证明　(1)设 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+k\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，等式两端同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $k_1\boldsymbol{A\xi}_1+$

$k_2A\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}A\boldsymbol{\xi}_{n-r}+kA\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$. 即 $k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 由 $\boldsymbol{\beta}\neq 0$ 即得 $k=0$，于是得等式 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0}$. 而 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，因而线性无关，于是 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$. 所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关.

(2) 设 $k_1(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r})+k\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$，即 $(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}+k)\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0}$. 由 (1) 知，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，$\boldsymbol{\eta}$ 线性无关，所以 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}+k=0$，$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，即 $k=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，所以 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

4. 设四元非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩 $R(A)=3$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},$$

求 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解

$$A(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)=2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}=0,$$

所以 $2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

由 $R(A)=3$ 知 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系只有一个向量，因此可取基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},$$

故原方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k\boldsymbol{\xi},\ k\ \text{为任意常数}.$$

5. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解，$R(A)=r$. 证明：$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 是导出组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

证明

$$A(\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_1)=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}=0,\ i=2,3,\cdots,n-r+1.$$

所以 $\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，$i=2,3,\cdots,n-r+1$，设

$$\sum_{i=2}^{n-r+1}k_i(\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_1)=\mathbf{0},$$

即

$$k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-(k_2+k_3+\cdots+k_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}_1=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关知，$k_2=k_3=\cdots=k_{n-r+1}=0$，所以 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 线性无关. 因此，$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解.

由 $R(\boldsymbol{A})=r$ 知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 恰好有 $n-r$ 个线性无关的解，所以 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

6. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解，$R(\boldsymbol{A})=r$. 证明：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解均可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r+1}$ 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证明　由第 5 题知，$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{\eta}_1+a_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+a_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+a_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)\\&=(1-a_2-a_3-a_4-\cdots-a_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}_1+a_2\boldsymbol{\eta}_2+a_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+a_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.\end{aligned}$$

令

$$k_1=1-a_2-a_3-a_4-\cdots-a_{n-r+1},$$
$$k_2=a_2,$$
$$k_3=a_3,$$
$$\cdots$$
$$k_{n-r+1}=a_{n-r+1},$$

于是通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}，且\ k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1.$$

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{4\times4}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}_{4\times4})=2$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量，其中 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=(-1,\ 0,\ 3,\ -4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(3,\ 2,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3+2\boldsymbol{\eta}_2=(5,\ 1,\ 0,\ 3)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解　由于 $R(\boldsymbol{A}_{4\times4})=2$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解的结构为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解.

取 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=(-1,\ 0,\ 3,\ -4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=3(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-2(\boldsymbol{\eta}_3+2\boldsymbol{\eta}_2)=(9,\ 6,\ 3,\ -6)^{\mathrm{T}}-(10,\ 2,\ 0,\ 6)^{\mathrm{T}}=(-1,\ 4,\ 3,\ -12)^{\mathrm{T}}$，显然，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.

微课视频

再取 $\boldsymbol{\eta}^*=\dfrac{1}{2}[(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)]=\dfrac{1}{2}[(-1,\ 0,\ 3,\ -4)^{\mathrm{T}}+(3,\ 2,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}]=(1,\ 1,\ 2,\ -3)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*=k_1(-1,\ 0,\ 3,\ -4)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,\ 4,\ 3,\ -12)^{\mathrm{T}}+(1,\ 1,\ 2,\ -3)^{\mathrm{T}}.$$

8. 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{B}_{n\times l}$ 的秩 $R(\boldsymbol{B})$ 满足 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明　记 $\boldsymbol{B}_{n\times l}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

即

$$A\beta_j=0(j=1,2,\cdots,l).$$

这说明矩阵 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $Ax=0$ 的解. 记齐次方程 $Ax=0$ 的解集为 S，由 $\beta_j\in S(j=1,2,\cdots,l)$，知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 中线性无关的向量的个数不会超过 S 的秩 R_S，即 $R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)\leqslant R_S$. 由教材第三章第四节定理4，得 $R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)\leqslant n-R(A)$，而由教材第三章第三节定理4，得 $R(B)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$，因此 $R(B)\leqslant n-R(A)$，即 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

微课视频

9. 设 A 为 n 阶矩阵$(n\geqslant 2)$，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明：

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n,\\1, & R(A)=n-1,\\0, & R(A)\leqslant n-2.\end{cases}$$

微课视频

证明 当 $R(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$，于是由 $|A^*|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^{n-1}\neq 0$ 知 $R(A^*)=n$. 当 $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$，于是 $AA^*=|A|E=O$，从而由第7题，知 $R(A)+R(A^*)\leqslant n$，于是 $R(A^*)\leqslant n-R(A)=1$. 而由 $R(A)=n-1$ 知，矩阵 A^* 中至少有一个元素不为零，从而$R(A^*)\geqslant 1$，所以 $R(A^*)=1$.

当 $R(A)\leqslant n-2$ 时，矩阵 A^* 中所有元素全为零，于是 $R(A^*)=0$.

习题 3-5　向量空间

1. 判断下列集合对通常的向量加法和数乘运算是否构成线性空间，并说明理由：

(1) $V_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 且满足 $x_1+\cdots+x_n=0\}$；

(2) $V_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 且满足 $x_1+\cdots+x_n=1\}$；

(3) $V_3=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 且 $x_1=x_2=\cdots=x_n\}$.

解 (1)构成.

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in V_1,$$

$$\forall y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T\in V_1,$$

有

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)=0,$$

所以

$$x+y\in V_1,$$

$$\forall k\in R,\ kx=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n),$$

$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,$$

所以

$$kx\in V_1,$$

所以 V_1 对通常的向量加法和数乘运算构成线性空间.

(2)不构成.

$$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}\in V_2,$$

$$\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^{\mathrm{T}}\in V_2,$$

有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)=1+1=2,$$

所以

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\notin V_2,$$

$$\forall k\in R,\ k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n),$$

$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=k$$

所以

$$k\boldsymbol{x}\notin V_2,$$

因此 V_2 对通常的向量加法和数乘运算不构成线性空间.

(3)构成.

$$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V_3,$$

$$\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_3,\ 及\ \forall k\in R,$$

有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n),$$

由 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，$y_1=y_2=\cdots=y_n$，有

$$x_1+y_1=x_2+y_2=\cdots=x_n+y_n,$$

$$kx_1=kx_2=\cdots=kx_n,$$

所以

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ k\boldsymbol{x}\in V_3,$$

因此 V_3 对通常的向量加法和数乘运算构成线性空间.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价，记

$$\mathfrak{L}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\,|\,k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbf{R}\},$$

$$\mathfrak{L}_2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=\{\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t\,|\,k_1,k_2,\cdots,k_t\in\mathbf{R}\},$$

证明：$\mathfrak{L}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathfrak{L}_2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

证明

$$\forall \boldsymbol{x}\in\mathfrak{L}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s),$$

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

由两个向量组等价，知 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i = l_{1i}\boldsymbol{\beta}_1 + l_{2i}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_{ti}\boldsymbol{\beta}_t,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= k_1(l_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + l_{21}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_{t1}\boldsymbol{\beta}_t) + k_2(l_{12}\boldsymbol{\beta}_1 + l_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_{t2}\boldsymbol{\beta}_t) + \cdots + k_s(l_{1s}\boldsymbol{\beta}_1 + l_{2s}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_{ts}\boldsymbol{\beta}_t) \\ &= (k_1 l_{11} + k_2 l_{12} + \cdots + k_s l_{1s})\boldsymbol{\beta}_1 + (k_1 l_{21} + k_2 l_{22} + \cdots + k_s l_{2s})\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + (k_1 l_{t1} + k_2 l_{t2} + \cdots + k_s l_{ts})\boldsymbol{\beta}_t,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathfrak{L}_2(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t).$$

同理可证 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathfrak{L}_2$，有 $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{L}_1$，所以 $\mathfrak{L}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathfrak{L}_2(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$.

3. 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

求向量空间 $\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = \{\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 + k_5\boldsymbol{\alpha}_5 \mid k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \in \mathbf{R}\}$ 的基与维数.

解 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的极大无关组就是向量空间 $\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)$ 的基，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩就是向量空间 $\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)$ 的维数，
所以由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3 & -1\\2 & 2 & 3 & 2 & -1\\3 & 2 & 1 & 1 & 2\\-1 & -1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知，向量空间 $\mathfrak{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)$ 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，维数为 3.

4. 验证

(1)

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基，求 $\boldsymbol{\alpha} = (1,\ 1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标；

(2)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

也是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基，求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$，以及 $\boldsymbol{\alpha} = (1,\ 1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

解　(1) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&2\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1-r_4\\r_2-r_4}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&-1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right),$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是一组基，$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，即$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标是$(0,\ -1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

(2)　$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1\\1&0&1&1&2\\1&1&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&1&\frac{2}{3}\end{array}\right),$

所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$是一组基，$\boldsymbol{\alpha}=\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_3+\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_4$，即$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标为$\left(\frac{2}{3}\quad -\frac{1}{3}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&-1\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&1&1&0&1\end{array}\right),$$

所以，过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

测试题三

一、填空题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的两个基，则从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵为________.

解

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

2. 已知两个向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{与} \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix},$$

并且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，则 $a=$________.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，可知矩阵方程 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$ 无解，于是由教材第三章第四节定理 3，$R(\boldsymbol{B})<R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$．而 $R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，所以有 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)<R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$．由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&1&1&2&4\\1&1&0&1&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&1&1&2&4\\0&0&-2&-1&0&a-7\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&a-5\end{pmatrix},$$

当 $a=5$ 时，$R(\boldsymbol{B})=2<R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=3$.

3. 设3阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，向量$\alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知$A\alpha$与$\alpha$线性相关，则$a=$________.

解

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}.$$

两个向量$A\alpha$与α线性相关，则它们的分量对应成比例，即$\frac{a}{a}=\frac{2a+3}{1}=\frac{3a+4}{1}$，所以$a=-1$.

4. 设$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组$Ax=b$存在2个不同的解，则$\lambda=$________；$a=$________.

解　由于线性方程组$Ax=b$存在2个不同的解，所以必有$|A|=0$，否则$Ax=b$只有唯一解. 由

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

得$\lambda=1$或$\lambda=-1$.

当$\lambda=1$时，由

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

知$Ax=b$无解，因此$\lambda=1$不符合题意.

当$\lambda=-1$时，由

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\0&0&0&2+a\end{array}\right)$$

得$a+2=0$，即$a=-2$时，$Ax=b$会有两个不同的解.

二、选择题

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

解　由于$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，选 A

2. 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则下列选项正确的是(　　).

A. 当 $r<s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关　　B. 当 $r>s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关

C. 当 $r<s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关　　D. 当 $r>s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关

解　由教材第三章第二节定理4知，选项D正确. 本题还可以举例排除错误选项. 当 $r<s$ 时，取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，所以 A、C 错误.

当 $r>s$ 时，取第一组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，第二组为 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，所以 B 错误，选 D.

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的任意两个非零矩阵，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

解　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，将 $\boldsymbol{A}$ 和零矩阵按列分块，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{0}_1,\boldsymbol{0}_2,\cdots,\boldsymbol{0}_n),$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,s,\qquad \boldsymbol{0}_j=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{m\times 1},\ j=1,2,\cdots,n.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，所以一定存在一列非零列 $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{sk} \end{pmatrix}$，使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{sk} \end{pmatrix}=\mathbf{0}_k,$$

即存在一组不全为零的数 b_{1k}，b_{2k}，…，b_{sk}，使 $b_{1k}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2k}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{sk}\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组必定线性相关.

将 $\boldsymbol{B}$ 和零矩阵按行分块，由 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$，有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_s^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_j^{\mathrm{T}}=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn})$，$j=1,2,\cdots,s$，$\mathbf{0}_k^{\mathrm{T}}=(0,\cdots,0)_{1\times n}$，$k=1,2,\cdots,m$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，所以一定存在一个非零行 $(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{ks})$，使得

$$(\alpha_{k1},\alpha_{k2},\cdots,\alpha_{ks})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_s^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\mathbf{0}_k^{\mathrm{T}},$$

即存在一组不全为零的数 $a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{ks}$，使 $a_{k1}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+a_{k2}\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+a_{ks}\boldsymbol{\beta}_s^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}_k^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组必定线性相关. 所以选 A.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　　).

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

解　若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，于是 $k_1(\boldsymbol{A\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{A\alpha}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{A}\mathbf{0}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 也线性相关，所以选 A.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

解

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+3\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+3\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$，可知选 A.

三、解答题

1. 设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,\ 1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ 2+a,\ 2,\ 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 3,\ 3+a,\ 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,\ 4,\ 4,\ 4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\ 3,\ 4]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\ 3,\ 4]{c_1+c_i}$$

$$\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4+10a^3,$$

$a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(1) $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为一个极大无关组.

(2) $a=-10$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行是 (a,b,c)，a，b，c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$，$k$ 为常数，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解　由 a，b，c 不全为 0 知，$R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，而 $R(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，于是 $R(\boldsymbol{A})<3$，所以 $R(\boldsymbol{A})=1$ 或 2.

(1) $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是一维的.

由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 知，$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，所以齐次方程通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ k \text{ 为任意常数.}$$

(2) $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是二维的. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 等价于

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$. 若 $c=0$，由 $(a,b,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$，知 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解. 于是通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2\in\mathbf{R}.$$

若 $c\neq 0$，则由 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 得 $x_3=-\frac{a}{c}x_1-\frac{b}{c}x_2$，于是 x_1，x_2 可看作自由变量，取

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix},$$

通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\c\\-b\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2\in\mathbf{R}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1)求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$；

(2)对(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解 (1)

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

x_3 是自由变量，于是$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2},\\x_2=-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2},\end{cases}$ 取 $x_3=1$，得特解

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

方程组的导出组为$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3,\\ x_2=-\dfrac{1}{2}x_3,\end{cases}$ 令 $x_3=2$，则得到导出组的基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

所以 $A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ k\in\mathbf{R}.$$

$$(A^2\mid\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是有 $x_1=-x_2-\dfrac{1}{2}$.

x_2，x_3 是自由变量，取$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，特解为

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

方程组的导出组为 $x_1=-x_2$. 依次取$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得到导出组的基础解系为

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以 $A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ k_1,\ k_2\in\mathbf{R}.$$

(2)**证明**　易知，

$$A\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ A^2\boldsymbol{\xi}_2=A\cdot(A\boldsymbol{\xi}_2)=A\cdot\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}.$$

设存在常数 k_1，k_2，k_3，使 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$（等式①），用 $\boldsymbol{A}$ 左乘等式①两端，得 $k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$（等式②），再用 $\boldsymbol{A}$ 乘等式②两端，得 $k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$，即 $k_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$. 由 $\boldsymbol{\xi}_1\neq\mathbf{0}$，得 $k_3=0$. 代入等式②，则有 $k_2=0$，于是 $k_1=0$，因此 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

4. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有 3 个线性无关的解，(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$；(2) 求 a，b 的值及方程组的通解.

证明　(1) 将线性方程组记为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$，设 3 个线性无关解为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，则 $\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，且 $\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$ 线性无关，所以 $R_S\geqslant2$，从而 $R(\boldsymbol{A})=n-R_S\leqslant2$，其中 R_S 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集 S 的秩. 另一方面，$\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行线性无关，则 $R(\boldsymbol{A})\geqslant2$. 综上，$R(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 由 $R(\boldsymbol{A})=2$，知 $\boldsymbol{A}$ 的所有 3 阶子式为 0，即

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&5\\a&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&1-a&3-a\end{vmatrix}=2(a-2)=0,$$

得 $a=2$，

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&-1\\1&3&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&-4\\0&2&b-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&-4\\0&0&b+3\end{vmatrix}=2(b+3)=0,$$

得 $b=-3$，

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&-1&1&-5&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-4&2\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是有 $\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4,\\x_2=-3+x_3-5x_4,\end{cases}$ x_3，x_4 为自由变量，取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

得特解为

$$\eta=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

方程组的导出组为$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4,\\x_2=x_3-5x_4,\end{cases}$取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

得导出组的基础解系为

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix},$$

于是，原方程通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix},\text{其中 } k_1,\ k_2 \text{ 为任意常数.}$$

5. 设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

(1)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(2)当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

(3)当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

证明　(1)(数学归纳法)$n=2$ 时，$|\boldsymbol{A}|=4a^2-a^2=3a^2$ 成立.

假设 $n=j$ 时，$|\boldsymbol{A}|=(j+1)a^j$ 成立，当 $n=j+1$ 时，$|\boldsymbol{A}|$按第 1 行展开得

$$|A|=2a\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{j\times j}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots\end{vmatrix}_{j\times j}$$

$$=2a(j+1)a^j-a^2\cdot\begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 2a\end{vmatrix}_{(j-1)\times(j-1)}$$

$$=2(j+1)a^{j+1}-a^2[(j-1)+1]a^{j-1}=(j+2)a^{j+1}=[(j+1)+1]a^{j+1}.$$

综上所述，$|A|=(n+1)a^n$.

(2)由克莱姆法则可知，当$|A|=(n+1)a^n\neq0$，即$a\neq0$时有唯一解. 又

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=na^{n-1},$$

由克莱姆法则，得

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a},$$（A_1为b替换A的第1列所成矩阵）.

(3)$a=0$有无穷解，此时方程组为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\text{ 即}\begin{cases}x_2=1,\\x_3=0,\\\vdots\\x_n=0,\end{cases}$$

x_1是自由变量，取$x_1=0$，得特解

$$\eta=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

取 $x_1=1$，得导出组的基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

该方程组的通解为

$$x=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad k\in\mathbf{R}.$$

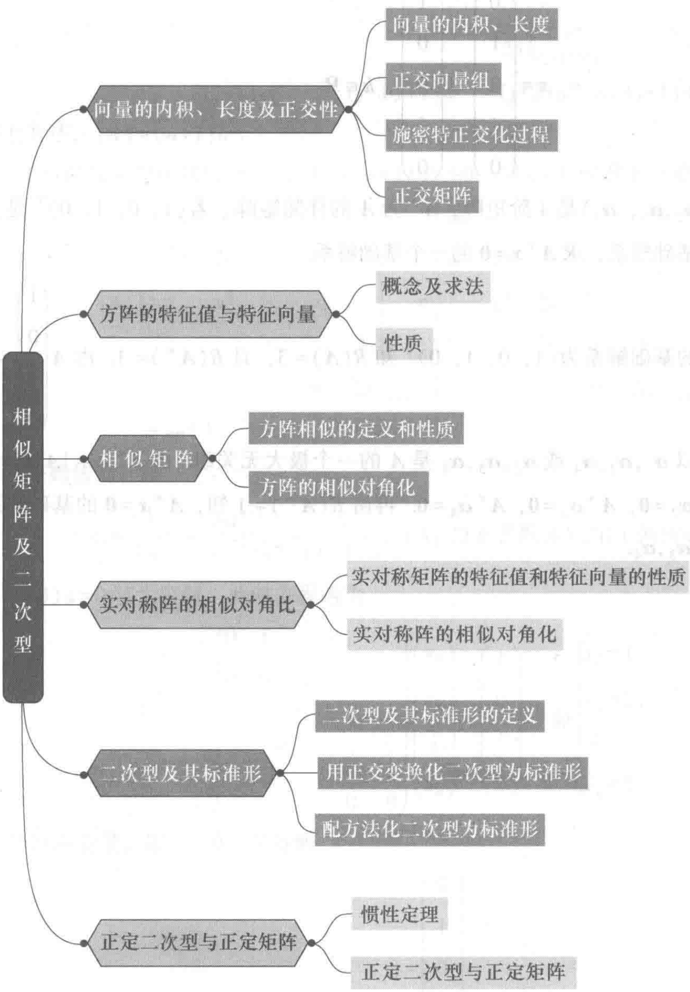
6. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，求 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

解　由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 知 $R(\boldsymbol{A})=3$，且 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$. 由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 知，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$. 再由 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$ 知，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

第四章　相似矩阵及二次型

一、知识结构

相似矩阵及二次型



二、归纳总结

1. 向量的内积、长度及正交性

向量的内积：设有 n 维向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，令

$$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

称$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

内积的性质(其中 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 都是 n 维列向量，λ 为实数)：

(1)$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}]$；

(2)$[\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=\lambda[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{x},\ \lambda\boldsymbol{y}]$；

(3)$[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}]+[\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}]$；

(4)$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}]\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}]=0$.

柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式：$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]^2\leqslant[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}]$.

向量的长度：设有 n 维向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，令 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度(或范数).

向量的长度具有下述性质.

(1)非负性：当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$.

(2)齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$.

(3)三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

向量的夹角：当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\theta=\arccos\dfrac{[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|}$称为 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**夹角**.

正交向量组：由一组两两正交的非零向量组成的向量组，称为正交向量组.

正交向量组的性质：若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一个正交向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

规范正交基：设 n 维向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是向量空间 $V(V\subseteq\mathbf{R}^n)$ 的一个基，如果 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是 V 的一个**规范正交基**.

施密特(Schmidt)正交化：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性无关的向量组，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\ \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\ \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}.$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 两两正交，且与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价.

正交矩阵：如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$(即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$)，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

关于正交矩阵有如下结论.

结论 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则下列结论等价：

(1)$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交阵；

(2)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组是 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交基；

(3)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组是 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交基.

结论 2 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1.

结论 3 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正交阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

正交变换：若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Px}$ 称为正交变换.

2. 方阵的特征值与特征向量

特征值和特征向量：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使关系式 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 成立，那么数 λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

特征值和特征向量的性质如下.

性质 1 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1)$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$；

(2)$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

性质 2 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为对应于特征值 λ 的特征向量，则

(1)λ^k 是方阵 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值(k 为非负整数)，对应于特征值 λ^k 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$；

(2)$k\lambda$ 是方阵 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值(k 为任意常数)，对应于特征值 $k\lambda$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$；

(3)当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1}是方阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值，对应于特征值 λ^{-1}的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$；

(4)若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式是 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$，则方阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值是 $\varphi(\lambda)$

(其中，$\varphi(\lambda)=a_m\lambda^m+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是关于 λ 的多项式)，对应于特征值 $\varphi(\lambda)$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

性质 3 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的同一特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 所对应的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1、k_2 不同时为零)也是特征值 λ 所对应的特征向量.

性质 4 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是依次与之对应的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

性质 5 设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是分别对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.

3. 相似矩阵

相似矩阵：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或者说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

定理 1 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

推论 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

定理 2 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似(即 $\boldsymbol{A}$ 能对角化)的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

4. 实对称矩阵的相似对角化

性质 1 实对称矩阵的特征值为实数.

性质 2 设 λ_1，λ_2 是对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ 是对应的两个特征向量. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

定理 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 必定正交相似于实对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，即存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上的元素是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

推论 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-k$，从而对应特征值 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

5. 二次型及其标准形

二次型：含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1,n}x_1x_n+ \\ a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2,n}x_2x_n+ \\ \cdots+ \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n+ \\ a_{n,n}x_n^2$$

称为**二次型**. 如果所有系数 $a_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$ 均为实数，则称二次型为实二次型.

二次型的标准形：如果 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 只含有平方项，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_nx_n^2,$$

称这样的二次型为二次型的标准形.

二次型的规范形：如果标准形的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 只在 1，−1，0 三个数中取值，也就是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2,$$

就称其为二次型的规范形.

二次型的矩阵表示：二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{23}x_2x_3 \\ +\cdots+a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n,n-1}x_nx_{n-1}=x^{\mathrm{T}}Ax,$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

矩阵的合同：设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

定理 任给二次型 $f=\sum\limits_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值.

推论 任给 n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A})$，总有可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$ 为规范形.

6. 正定二次型与正定矩阵

定理 1(惯性定理) 设有二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为 r，有两个可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，使

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2\quad(k_i\neq0),$$

及

$$f=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\cdots+\lambda_r z_r^2 \quad (k_i\neq 0),$$

则 $k_1,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等.

正定二次型：设有二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对于任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(\boldsymbol{x})>0$(显然 $f(\boldsymbol{0})=0$)，则称二次型 f 为正定二次型，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

负定二次型：如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $f(\boldsymbol{x})<0$，则称二次型 f 为负定二次型，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的.

定理 2 n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n，即它的规范形的 n 个系数全为 1.

推论 1 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

推论 2 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

定理 3(赫尔维茨定理) 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

对称阵为负定的充分必要条件是：奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0\ (r=1,2,\cdots,n).$$

三、典型例题

例 1 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零特征值为 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则：

(1)当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为______，对应的特征向量为______；

(2)$\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的一个特征值为______，对应的特征向量为______.

微课视频

解 答案分别是(1)$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，$\alpha$；(2)$\lambda$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 下面给出理由.

(1)因为 $|\boldsymbol{A}|$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之积，所以当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，一定有 $\lambda\neq 0$. 从而由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 以及 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得到 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$. 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为

$\frac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(2)由 $A\alpha=\lambda\alpha$ 得，$(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha)=P^{-1}A\alpha=\lambda(P^{-1}\alpha)$，所以 $P^{-1}AP$ 的一个特征值为 λ，对应的特征向量为 $P^{-1}\alpha$.

例 2 设 A 为 n 阶方阵，$|A|\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+3E$ 必有特征值______.

解 由 $|A|\neq 0$ 知，A 的特征值 $\lambda\neq 0$. 于是由例 1 及教材第四章第二节性质 2，知 $(A^*)^2+3E$ 必有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+3$.

例 3 设 3 阶矩阵 A 满足 $|A-E|=|A-2E|=|A+2E|=0$，E 为 3 阶单位矩阵，则 $|2A^{-1}-3E|=$______.

微课视频

解 令 $\varphi(A)=2A^{-1}-3E$，根据教材第四章第二节性质 2，$\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=2\lambda^{-1}-3$. 又由 $|A-E|=|A-2E|=|A+2E|=0$ 知，A 的特征值为 1，2，−2，所以 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=2-3$，$2\times\frac{1}{2}-3$，$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3$，即 $\varphi(\lambda)=-1,-2,-4$，于是 $|2A^{-1}-3E|=(-1)\times(-2)\times(-4)=-8$.

例 4 (**考研真题** 2017 年数学二第 14 题)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$______.

解 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，由题设知 $A\alpha=\lambda\alpha$，即 $\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，于是有 $\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$，故 $a=-1$.

例 5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量，并判断其特征向量是否两两正交.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=10$ 时，解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量为

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 两两正交.

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果存在正整数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵. 证明：幂零矩阵的特征值全为零.

证明 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值为 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，于是 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\lambda^k\boldsymbol{\alpha}$. 由 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，有 $\lambda^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 由于特征向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^k=0$，从而 $\lambda=0$. 由特征值的任意性可知，幂零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

例 7 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是非零向量，且 $a_1b_1\neq0$，求矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值和特征向量.

解 由 $a_1b_1\neq0$ 有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{A\alpha}=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A}$ 有非零特征值 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0，且线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即特征值 0 对应的线性无关的特征向量有 $n-1$ 个，所以特征值 0 是 $n-1$ 重的. 由

微课视频

$$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b_2}{b_1} & \cdots & \dfrac{b_n}{b_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

得特征值 0 对应的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix} -b_3 \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix} -b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

例 8 （考研真题　2017 年数学一第 5 题）【单选题】设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维单位向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）.

微课视频

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

解　由 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维单位向量，可知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$，因而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 $\lambda_1=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，从而一定可以与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，所以 $R(\boldsymbol{\Lambda})=R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1$. 于是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上一定有 $n-1$ 个零，也就是说，矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 有 $n-1$ 个特征值 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 所以矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，于是 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，于是 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 可逆.

矩阵 $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，于是 $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 可逆.

矩阵 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，于是 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 可逆.

所以本题答案为 A.

例 9 （考研真题　2017 年数学一第 6 题）【单选题】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则（　　）.

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

解　由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，2，1. 由于 $3-R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2$，所以二重特征

值 2 对应着两个线性无关的特征向量，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似.

由 $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 可知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 2，2，1. 但是 $3-R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=1$，所以二重特征值 2 对应着一个线性无关的特征向量，从而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不能与对角阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似.

所以答案为 B.

例 10　（**考研真题**　2014 年数学一第 21 题）证明 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\text{与}\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}\text{相似.}$$

微课视频

证明　要证明这两个矩阵相似，只要证明它们都相似于同一个对角阵即可.

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$. 显然，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(1,1,\cdots,1)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，于是 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}.$$

由 $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0-\lambda&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^{n-1}(n-\lambda)$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的特征值也是 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 再由 $n-R(\boldsymbol{B})=n-1=$ 特征值 0 的重数，$\boldsymbol{B}$ 一定也相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$.

由相似关系的传递性，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

例 11 【单选题】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,-\boldsymbol{p}_1)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为（　　）.

微课视频

A. $2y_1^2-2y_2^2+y_3^2$　　　　B. $2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

C. $2y_1^2-y_2^2-2y_3^2$　　　　D. $2y_1^2+2y_2^2+y_3^2$

解 由题设，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，有 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$. 且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3,\ -\boldsymbol{p}_1)=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$,

于是

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix},$$

所以在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下,

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=2y_1^2-2y_2^2+y_3^2.$$

因此答案为 A.

例 12 若二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 的取值范围是______.

微课视频

解 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&-1\\a&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$. 二次型是正定的，则 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于零. 即

$$|1|=1>0,\quad \begin{vmatrix}1&a\\a&4\end{vmatrix}=4-a^2>0,\quad \begin{vmatrix}1&a&-1\\a&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=8-4a-4a^2>0.$$

于是得 $-2<a<1$.

例 13 （**考研真题**　2015 年数学一第 21 题）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$. (1)求 a，b 的值；(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解　(1)矩阵 A 与 B 相似，从而有相同的特征值，于是特征值之和(即矩阵对角线上的元素之和)相等，即 $3+a=1+b+1$，$a-b=-1$. 并且有 $|A|=|B|$，即

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}，2a-3=b，2a-b=3.$$

解方程组 $\begin{cases}a-b=-1,\\ 2a-b=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=4,\\ b=5.\end{cases}$

(2)**解法一**

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}0-\lambda & 2 & -3\\ -1 & 3-\lambda & -3\\ 1 & -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$.

$\lambda=1$ 时，解 $(A-E)x=0$，得基础解系为 $\xi_1=(2,\ 1,\ 0)^T$，$\xi_2=(-3,\ 0,\ 1)^T$.

$\lambda=5$ 时，解 $(A-5E)x=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,\ 1,\ -1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

解法二

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=E+C,$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}(1\quad -2\quad 3),$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=4$.

$\lambda=0$ 时，解 $(C-0\cdot E)x=0$，得基础解系为 $\xi_1=(2,\ 1,\ 0)^T$，$\xi_2=(-3,\ 0,\ 1)^T$.

$\lambda=4$ 时，解 $(C-4E)x=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,\ 1,\ -1)^T$.

于是，A 的特征值为 $\lambda_A=1+\lambda_C=1+0,\ 1+0,\ 1+4$，即 $\lambda_A=1,\ 1,\ 5$，对应的特征向量分别是 ξ_1，ξ_2 和 ξ_3. 令 $P=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$. 证明：当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

微课视频

证明 任取 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

因为 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，所以当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，从而 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

例 15 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为正定阵. 证明 $\boldsymbol{AB}$ 是正定阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 （必要性）矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{AB}$ 均为正定阵，则它们均为对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$. 于是

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA},$$

即 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换.

（充分性）矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为正定阵，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$. 于是由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵. 下面，我们证明 $\boldsymbol{AB}$ 的任一特征值大于零，从而由教材第四章第六节推论 2，$\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵.

设 λ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量，即 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定阵. 于是，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$. 由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 正定，有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}>0$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}>0$（$\boldsymbol{\alpha}$ 是特征向量，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$），从而 $\lambda>0$. 由 λ 的任意性知，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的所有特征值均大于零，故正定.

例 16 （**考研真题** 2017 年数学一第 20 题）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$. (1) 证明 $R(\boldsymbol{A})=2$；(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

证明 (1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可得 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，因此 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必有 0. 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值仅有一个 0，另两个是非零的，且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. 设 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 λ_1，λ_2，则与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵为 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&0\end{pmatrix}$，$\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$. 因此，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\Lambda})=2$.

微课视频

(2) 由于 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以 $3-R(\boldsymbol{A})=1$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只有 1 个解向量.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

又

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 $k\in\mathbf{R}$.

四、习题详解

习题 4-1　向量的内积、长度及正交性

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$，求向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 均正交.

解　向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 均正交，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$. 设 $\boldsymbol{\gamma}=(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $\begin{cases}x+y+2z=0,\\-4x+2y+2z=0,\end{cases}$ 由 $\begin{pmatrix}1&1&2\\-4&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{6}]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}z,\\y=-\dfrac{5}{3}z,\end{cases}$ 取 $z=3$，则 $\boldsymbol{\gamma}=(-1,\ -5,\ 3)^{\mathrm{T}}$.

2. 试用施密特法把下列向量组正交化：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

解　(1) 取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(2)取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}.$$

3. 下列矩阵是不是正交矩阵？并说明理由.

(1) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

解　(1)不是；(2)是.

理由如下.

(1)记

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),$$

由于 $\|\boldsymbol{\alpha}_1\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{11}{18}}\neq1$，所以该矩阵不是正交矩阵.

(2)记

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3),$$

则 $\|\boldsymbol{\beta}_1\|=\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$，$\|\boldsymbol{\beta}_2\|=\sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{81}}$ $=1$，$\|\boldsymbol{\beta}_3\|=\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$，且 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，所以该矩阵是正交矩阵.

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵. 因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=1$，所以 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1$ 即 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1.

5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是正交阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是正交阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

6. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

证明 先证对称性. $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$，所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵.

再证 $\boldsymbol{H}$ 是正交阵.

因为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，可得 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

习题 4-2 方阵的特征值与特征向量

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

解 (1)矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+1)^2,$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，解方程 $(A+E)x=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

从而 α_1，α_2 就是对应于 $\lambda_1=\lambda_2-1$ 的两个线性无关的特征向量，并且对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$(k_1，k_2 不同时为零).

当 $\lambda_3=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

从而 α_3 就是对应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量，并且对应于 $\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k\alpha_3(k\neq 0)$.

(2)矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&1\\0&1-\lambda&1\\-1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 就是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量，并且对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_1$ $(k\neq0)$.

当 $\lambda_3=2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是对应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量，并且对于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_2(k\neq0)$.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&2&0&7\\0&0&3&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&4&1\\0&2-\lambda&0&7\\0&0&3-\lambda&4\\0&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda-3),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$，$\lambda_4=3$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 就是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量，并且对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_1$ $(k\neq 0)$.

当 $\lambda_3=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是对应于 $\lambda_3=1$ 的特征向量，并且对应于 $\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_2(k\neq 0)$.

当 $\lambda_4=3$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 就是对应于 $\lambda_4=3$ 的特征向量，并且对应于 $\lambda_4=3$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_3(k\neq 0)$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

证明 因为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}|$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

3. 设 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 3.

证明 取 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值 λ，则存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$. 由 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\xi}=(\lambda^2-4\lambda+3)\boldsymbol{\xi}=(\lambda-1)(\lambda-3)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，1，-2，求 $|(2\boldsymbol{A})^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $|\boldsymbol{A}|=(-1)\times1\times(-2)=2$. 于是 $|2\boldsymbol{A}|=2^3|\boldsymbol{A}|=2^3\times2=16$，记

$$\varphi(\boldsymbol{A})=(2\boldsymbol{A})^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},$$

由于 $(2\boldsymbol{A})^*\cdot(2\boldsymbol{A})=|2\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{E}$，因此 $(2\boldsymbol{A})^*=|2\boldsymbol{A}|\cdot(2\boldsymbol{A})^{-1}=16\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=8\boldsymbol{A}^{-1}$，所以 $\varphi(\boldsymbol{A})=8\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，这里，$\varphi(\boldsymbol{A})$ 虽不是矩阵多项式，便也具有矩阵多项式的特性，因而 $\varphi(\lambda)=8\cdot\lambda^{-1}+3\lambda-2$，即

$$\varphi(-1)=-8-3-2=-13,\ \varphi(1)=8+3-2=9,\ \varphi(-2)=-4-6-2=-12.$$

所以，$|(2\boldsymbol{A})^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=(-13)\times9\times(-12)=1404$.

5. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解 由$|A|=0$，$|A+2E|=0$，$|A-E|=0$，可知A的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，从而$|A+E|$的特征值为$\mu_1=\lambda_1+1=1$，$\mu_2=\lambda_2+1=-1$，$\mu_3=\lambda_3+1=2$，故$|A+E|=1\times(-1)\times2=-2$.

6. 设$\lambda\neq0$是m阶矩阵$A_{m\times n}B_{n\times m}$的特征值，证明$\lambda$也是$n$阶矩阵$BA$的特征值.

证明 设x是AB的对应于非零特征值λ的特征向量，则$ABx=\lambda x\neq 0$，因此，$Bx\neq 0$. 否则，若$Bx=0$，则$A(Bx)=A\cdot 0=0$，矛盾，于是，有$B(ABx)=B(\lambda x)=\lambda Bx$，即$(BA)\cdot(Bx)=\lambda(Bx)$. 根据特征值与特征向量的概念，$\lambda$是$BA$的特征值，且$Bx$是其对应的特征向量.

7. 证明性质5：设λ_1和λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是分别对应于$\lambda_1$和$\lambda_2$的线性无关的特征向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关.

证明 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t=0$(记为(＊)式)，用$A$左乘(＊)式两端，得$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s+l_1A\beta_1+l_2A\beta_2+\cdots+l_tA\beta_t=0$，由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是属于特征值$\lambda_1$的特征向量，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是属于特征值$\lambda_2$的特征向量，所以得$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_2+\cdots+k_s\lambda_1\alpha_s+l_1\lambda_2\beta_1+l_2\lambda_2\beta_2+\cdots+l_t\lambda_2\beta_t=0$. 即

$$\lambda_1(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)+\lambda_2(l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t)=0\text{(记为(＊＊)式)}$$

由(＊＊)式减去(＊)式的λ_1倍，得

$$(\lambda_2-\lambda_1)(l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t)=0.$$

而$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t=0$，再由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关，有$l_1=l_2=\cdots=l_t=0$. 于是(＊)式可写为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$. 而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$也线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots k_s=0$，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关.

习题 4-3 相似矩阵

1. 若n阶矩阵A与B相似，证明$R(A)=R(B)$且$|A|=|B|$.

证明 由于A，B相似，存在可逆矩阵P使得$B=P^{-1}AP$. 由P可逆知，$P=P_1P_2\cdots P_t$，其中$P_1,P_2,\cdots,P_t$是初等矩阵，于是A与B等价，故$R(A)=R(B)$. $|B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|$.

2. 设A，B都是n阶矩阵，且A可逆，证明AB与BA相似.

证明 因为A可逆，故$BA=A^{-1}ABA=A^{-1}(AB)A$，因此AB与BA相似.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$，问$a$，$b$，$c$取何值时，矩阵$A$可相似对角化.

解 显然，A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=\lambda_4=2$，故A可相似对角化，只需$\lambda_1=\lambda_2=1$

与 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 均有 2 个线性无关的特征向量，即方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 均有 2 个线性无关的解，亦即系数矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=4-2=2$，系数矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=4-2=2$.

对 $\lambda=1$，

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a&0&0&0\\2&b&1&0\\2&3&c&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&b&1&0\\0&3-b&c-1&1\\a&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

要使 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$，必有 $a=0$.

对 $\lambda=2$，

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\2&b&0&0\\2&3&c&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

要使 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2$，必有 $c=0$.

从而，$a=0$，$c=0$，b 可取任意值.

4. 已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1)求参数 a，b 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值；

(2)$\boldsymbol{A}$ 能不能相似对角化？并说明理由.

解 (1) $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=(-1)\cdot\boldsymbol{p},$$

故 $2+a=-1$，$1+b=1$，即 $a=-3$，$b=0$，$\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值为 $\lambda=-1$.

(2) $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3,$$

故 $\lambda_{1,2,3}=-1$，而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，因此 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2$.

于是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $3-R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=3-2=1$ 个解向量，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 只有 1 个线性无关的特征向量. 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

解
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

解 $(A-\lambda_1E)x=0$，得基础解系 $\xi_1=(1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

解 $(A-\lambda_2E)x=0$，得基础解系 $\xi_2=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

解 $(A-\lambda_3E)x=0$，得基础解系 $\xi_3=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有

$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}，且 P^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

从而得，

$$A^{100}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2^{99}-1&2^{99}\\0&2^{99}&2^{99}\\0&2^{99}&2^{99}\end{pmatrix}.$$

6. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解　令 $P=(p_1,p_2,p_3)$. 由题意知，

$$A(p_1,p_2,p_3)=(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},$$

故

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}.$$

经过计算，得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

因此，

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}.$$

7. 若 n 阶非零实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$($k$ 为正整数)，证明 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

证明 假设 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&&\lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P},$$

则

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&&\lambda_n^k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{O}.$$

所以

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&&\\&\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^k\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}.$$

于是 $\lambda_1^k=\lambda_2^k=\cdots=\lambda_n^k=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，这与 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵矛盾，所以 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

8. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 相似.

证明 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$，从而有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{T}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{T}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

因此，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 相似.

习题 4-4 实对称矩阵的相似对角化

1. 试求正交阵 $\boldsymbol{P}$，将下列对称阵化为对角阵：

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.

解 (1)矩阵的特征多项式为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

当 $\lambda=0$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得到特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得到特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=3$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得到特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

(2)矩阵的特征多项式为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.

当 $\lambda=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得到特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，得

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\\ \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=10$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\dfrac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得到特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}&\dfrac{2\sqrt{5}}{15}&-\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}&\dfrac{4\sqrt{5}}{15}&-\dfrac{2}{2}\\ 0&\dfrac{\sqrt{5}}{3}&\dfrac{2}{3}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}.$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 $\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解 因为 A 是实对称阵，从而可求一个正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

其中 λ_1，λ_2，λ_3 是 A 的全部特征值. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(A)&=A^{10}-6A^9+5A^8=(P\Lambda P^{-1})^{10}-6(P\Lambda P^{-1})^9+5(P\Lambda P^{-1})^8\\&=P(\Lambda^{10}-6\Lambda^9+5\Lambda^8)P^{-1}.\end{aligned}$$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-5)=0$$

得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$.

对特征值 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

取特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

单位化，得

$$p_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

对特征值 $\lambda_2=-1$，解齐次线性方程组 $(A+E)x=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&2\\2&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

取特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

单位化，得

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}.$$

对特征值 $\lambda_3=5$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

取特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

单位化，得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}.$$

令矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求正交阵，且

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix},$$

由于

$$\Lambda^{10}-6\Lambda^9+5\Lambda^8=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}^{10}-6\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}^{9}+5\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}^{8}$$

$$=\begin{pmatrix}1-6+5&&\\&1+6+5&\\&&5^{10}-6\cdot5^9+5\cdot5^8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&12&\\&&0\end{pmatrix},$$

所以

$$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8=P(\Lambda^{10}-6\Lambda^9+5\Lambda^8)P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\0&-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&12&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}&-\frac{\sqrt6}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&2&-4\\2&2&-4\\-4&-4&8\end{pmatrix}.$$

3. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=0$，对应 λ_1，λ_2 的特征向量依次为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解 设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 p_3，由于 A 是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量互相正交，因而有 $p_1^{\mathrm T}p_3=0$，$p_2^{\mathrm T}p_3=0$，即 p_3 是方程 $\begin{pmatrix}p_1^{\mathrm T}\\p_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}x=0$ 的解向量. 由

$$\begin{pmatrix}p_1^{\mathrm T}\\p_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

知，可取 $p_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，将 p_1，p_2，p_3 单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\cdot\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_2\|}\cdot\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_3\|}\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵，且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}.$$

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵，如果 $\boldsymbol{P}$ 的第 1 列为 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$，求 a，$\boldsymbol{P}$.

解 设 $\boldsymbol{p}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$，即

$$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}，亦即\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{5+a}{\sqrt{6}}\\ \frac{4+2a}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

于是 $\lambda_1=2$，$5+a=4$，$4+2a=2$，即 $\lambda_1=2$，$a=-1$. 因此，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}.$$

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&4\\-1&3-\lambda&-1\\4&-1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-5),$$

所以，$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-4$，$\lambda_3=5$.

当 $\lambda=-4$ 时，解 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=5$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

从而，

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

5. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix},$$

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

(2)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1)由 $\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1，1，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，因而 $\boldsymbol{A}$ 一定正交相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$. 于是 $R(\boldsymbol{\Lambda})=R(\boldsymbol{A})=2$，从而 $\lambda_3=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 个特征值为 0. 设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，解方程 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(2)将向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，单位化得

$$p_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ p_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

并令 $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$，正交阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

6. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$x_1\neq0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{xx}^{\mathrm{T}}$.

(1)证明 $\lambda=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值；

(2)求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

证明 (1)设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值，$\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量，则有

$$\boldsymbol{Ay}=\lambda\boldsymbol{y},\ \lambda^2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{Ay}=\lambda(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{y},$$

于是可得 $\lambda^2=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，从而 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{xx}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，因而一定与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，其中 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 而 $R(\boldsymbol{\Lambda})=R(\boldsymbol{A})=1$，所以 n 个特征值中只有一个非零，而有 $n-1$ 个零. 即 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值.

(2)非零特征值是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，由 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}$ 可知，特征值 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，对于 $\lambda=0$，解方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1^2&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\x_2x_1&x_2^2&\cdots&x_2x_n\\\vdots&&&\vdots\\x_nx_1&x_nx_2&\cdots&x_n^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\frac{x_2}{x_1}&\cdots&\frac{x_n}{x_1}\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

得特征值 $\lambda=0$ 对应的特征向量为

$$(-x_2,x_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ (-x_3,0,x_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,(-x_n,0,0,\cdots,x_1)^{\mathrm{T}}.$$

7. 设3阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})=2$ 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$. 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，可得

$$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{A\xi}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$，$\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，因而可以与对角阵相似，对角阵对角线上的元素是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，又因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$.

习题4-5　二次型及其标准形

1. 试用矩阵记号表示下列二次型：

(1) $f=2x_1^2-2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$；

(2) $f=-x^2+2y^2-3z^2+2xy-6xz-4yz$；

(3) $f=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$.

解 (1) $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&-2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

(2) $f=(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&2&-2\\-3&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$；

(3) $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

2. 求一个正交变换化下列二次型成标准形：

(1) $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3$；

(2) $f=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

(3) $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=1$，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=2$，解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$.

对于 $\lambda_3=3$，解方程 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下，二次型化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$.

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，由 $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，解方程 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\cdot\boldsymbol{\beta}_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\cdot\boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=2$，解方程 $(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下，二次型化为标准形 $f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.

(3) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$，由习题 4-4 的第 1(2) 题可知，有正交阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下，二次型化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$.

3. 证明：二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则有一正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}$$

成立，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，不妨设 λ_1 最大.

作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，有

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

因 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 正交变换，所以当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，有 $\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|=1$，即 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$，因此，

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_1$$

又当 $y_1=1$，$y_2=y_3=\cdots=y_n=0$ 时，$f=\lambda_1$，所以 $f_{\max}=\lambda_1$.

4. 用配方法化下列二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解 (1)

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_1x_2-2x_2x_3\\&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+x_3^2\\&=(x_1+x_2)^2-(x_2+x_3)^2+x_3^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=\quad x_2+x_3,\\y_3=\qquad x_3,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3,\\x_2=\quad y_2-y_3,\\x_3=\qquad y_3,\end{cases}$$

就把 f 化成标准形(规范形) $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$，所用变换矩阵为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

(2) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$

$$\begin{aligned}&=(\sqrt{2}x_1)^2+2x_1x_2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2-2x_2x_3+(\sqrt{2}x_3)^2+(\sqrt{2}x_3)^2\\&=\left(\sqrt{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2-\sqrt{2}x_3\right)^2+(\sqrt{2}x_3)^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=\sqrt{2}x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2,\\y_2=\qquad\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2-\sqrt{2}x_3,\\y_3=\qquad\qquad\sqrt{2}x_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3,\\x_2=\qquad\dfrac{2}{\sqrt{2}}y_2+\dfrac{2}{\sqrt{2}}y_3,\\x_3=\qquad\qquad\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3,\end{cases}$$

就把 f 化成标准形(规范形) $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，所用变换矩阵为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0&\dfrac{2}{\sqrt{2}}&\dfrac{2}{\sqrt{2}}\\0&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

5. 已知二次型$f=4x_1^2+\left(2+\dfrac{a}{2}\right)x_2^2+\left(2+\dfrac{a}{2}\right)x_3^2+(4-a)x_2x_3$.

(1)求它所对应的矩阵$\boldsymbol{A}$及其秩$R(\boldsymbol{A})$；

(2)当$R(\boldsymbol{A})=2$时求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使得二次型可化为标准形.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2+\dfrac{a}{2}&2-\dfrac{a}{2}\\0&2-\dfrac{a}{2}&2+\dfrac{a}{2}\end{pmatrix},$$

当$a=0$时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2+\dfrac{a}{2}&2-\dfrac{a}{2}\\0&2-\dfrac{a}{2}&2+\dfrac{a}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以$R(\boldsymbol{A})=2$.

当$a\neq0$时，$2+\dfrac{a}{2}\neq2-\dfrac{a}{2}$，于是$R(\boldsymbol{A})=3$.

(2)当$R(\boldsymbol{A})=2$时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&2\\0&2&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)^2=0$$

得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=0$.

对特征值$\lambda_1=\lambda_2=4$，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

取线性无关特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

并且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 刚好正交，所以只需单位化，得

$$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

对特征值 $\lambda_3=0$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

取特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

单位化，得

$$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形 $f=4y_1^2+4y_2^2$.

习题 4-6　正定二次型与正定矩阵

1. 设 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为正定二次型，求 a.

解　二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

二次型为正定二次型，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于零，即

$$1>0,\quad \begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2>0,\quad \begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=2a-2a^2>0,$$

由 $1-a^2>0$ 得到 $-1<a<1$，由 $2a-2a^2>0$ 得到 $0<a<1$，所以 $0<a<1$.

2. 判定下列二次型的正定性：

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

(2) $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

解 (1) 此二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

它的各阶顺序主子式为

$$a_{11}=-2<0,\quad \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0,\quad \begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0,$$

所以，该二次型是负定的.

(2) 此二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix},$$

它的各阶顺序主子式为

$$a_{11}=5>0,\quad \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1>0,$$

所以，该二次型是正定的.

(3) 此二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

它的各阶顺序主子式为

$$a_{11}=2>0,\quad \begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=6>0,\quad \begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{vmatrix}=10>0,$$

所以，该二次型是正定的.

3. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定阵，$\boldsymbol{D}$ 为 n 阶对角阵且对角元全非负，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$ 也为正定阵.

证明 由于 $\boldsymbol{D}$ 是 n 阶对角阵且对角元全非负，所以对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\geqslant 0$. 而 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵，所以，对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

因此对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}>0$，于是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}$ 必为正定二次型，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$为正定矩阵.

4. 证明对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

证明 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是正的，存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\cdot\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ \sqrt{\lambda_2},\ \sqrt{\lambda_3})\cdot\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ \sqrt{\lambda_2},\ \sqrt{\lambda_3})\cdot\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ \sqrt{\lambda_2},\ \sqrt{\lambda_3})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

反之，$\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})>0$. 因此，$\boldsymbol{A}$ 是正定的.

5. 已知 $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 也是正定矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，对于任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，对于任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})>0$，从而得到 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 正定.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，常数 $k>0$，证明 $k\boldsymbol{A}$ 也是正定矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，所以对于任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，又因为 $k>0$，所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}>0$，所以 $k\boldsymbol{A}$ 也是正定阵.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$. 设 $\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{D}$ 是可逆的. 因此，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定的. 由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}|>0$，$\boldsymbol{A}^{-1}$是正定阵，可得 $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 m、n 阶正定矩阵，试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

解 由于$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是正定矩阵，所以存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$，则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

显然，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$可逆，所以，$\boldsymbol{C}$为正定阵.

测试题四

一、填空题

1. 如果矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & x & 6\\ 3 & 6 & x\end{pmatrix}$正定，则$x$的取值范围是__________.

解 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & x\end{vmatrix}=x-4>0$，得$x>4$.

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & x & 6\\ 3 & 6 & x\end{vmatrix}=(x-4)(x-9)>0$，得$x<4$或$x>9$.

综上，$x>9$.

2. 已知$f=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$可化成标准形$f=6y_1^2$，则$a=$__________.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$$

由题知，6，0，0是矩阵A的特征值，因此由特征值之和等于矩阵对角线上元素之和，即$6+0+0=a+a+a$，得$a=2$.

3. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$经正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$可化为标准形$-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，则矩阵$\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}=$__________.

解 标准形对应的矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

且存在正交阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^3-3(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}^3\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}(3\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3-3\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

而

$$A^3-3\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^3-3\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2E,$$

所以

$$A^3-3A=P(A^3-3\Lambda)P^{-1}=P(2E)P^{-1}=2E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

4. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $|A^3-5A^2+7A|=$__________.

解 记 $\varphi(A)=A^3-5A^2+7A$，则 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$. $\varphi(1)=1^3-5\cdot 1^2+7\cdot 1=1-5+7=3$，$\varphi(2)=2^3-5\cdot 2^2+7\cdot 2=8-20+14=2$，$\varphi(3)=3^3-5\cdot 3^2+7\cdot 3=27-45+21=3$，所以 $|A^3-5A^2+7A|=\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)=3\times2\times3=18$.

5. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，3，λ. 若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$__________.

解 由于 $|A|=2\cdot3\cdot\lambda=6\lambda$，而 $|2A|=2^3\cdot|A|=8\cdot6\lambda=48\lambda=-48$，所以 $\lambda=-1$.

二、选择题

1. 设 λ_1，λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

A. $\lambda_1\neq0$　　B. $\lambda_2\neq0$　　C. $\lambda_1=0$　　D. $\lambda_2=0$

解

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0},$$

$$(k_1+k_2\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以有 $\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1=0,\\k_2\lambda_2=0,\end{cases}$ 而要使 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关，只有上述方程组只有零解，即系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}\neq0$$

知 $\lambda_2\neq0$，故选 B.

2. 设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

解 设 $B=\frac{1}{3}A^2$，由于 $\lambda=2$ 是 A 的一个特征值，所以 B 有特征值 $\mu=\frac{1}{3}\cdot2^2=\frac{4}{3}$.

从而 $B^{-1}=\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有特征值 $\frac{1}{\mu}=\frac{3}{4}$，因此选 B.

3. 矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件是(　　).

A. $a=0$，$b=2$　　　　B. $a=0$，b 为任意常数

C. $a=2$，$b=0$　　　　D. $a=2$，b 为任意常数

解　因为矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$是对称阵，所以一定可相似对角化，从而两个矩阵相似的充分必要条件是 2，b，0 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 于是，由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-\lambda(\lambda^2-(2+b)\lambda+2b-2a^2)=0$得$\lambda=2$，$\lambda=b$是方程$\lambda^2-(2+b)\lambda+2b-2a^2=0$的解. 将$\lambda=2$，$\lambda=b$代入方程，即得$a=0$，$b$ 为任意常数，所以选 B.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　).

A. $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 一定相似于对角阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{pmatrix}$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，$\lambda_4$是 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为λ，则由$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$有$\lambda^2+\lambda=0$，因此$\lambda=0$或$\lambda=-1$. 再由 $\boldsymbol{A}$ 的秩$R(\boldsymbol{A})=3$，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值一定是$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，$\lambda_4=0$. 所以选 D.

5. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

A. 合同，且相似　　　　B. 合同，但不相似

C. 不合同，但相似　　　　D. 既不合同，也不相似

解　根据相似的必要条件：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上元素之和与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角线上元素之

和相等，易知，该题中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似，所以排除选项 A 与 C.

由矩阵合同的定义易知，两个矩阵合同的充分必要条件是这两个矩阵对应的二次型具有相同的正惯性指数和负惯性指数，因而可以通过求矩阵的特征值来判断这两个矩阵是否合同.

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2,$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3，3，0，故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 0. 而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵，易知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数也是 2，负惯性指数也是 0，因而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 所以本题正确答案为 B.

三、解答题

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})<n$，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值，有公共的特征向量.

证明　令 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{H})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})<n$，所以 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 属于特征值 0 的公共特征向量. 所以，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值，有公共的特征向量.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明　由于 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{P}$ 为对应的特征向量，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\lambda\boldsymbol{P}$，进而有，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=(\lambda\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{P})=\lambda^2\cdot(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})$. 从而 $\lambda^2=1$，$\lambda=1$ 或者 $\lambda=-1$. 而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\cdots\lambda_n=-1$，故 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值两两互异，如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量恒为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 的两两互异的特征值为 λ_1，λ_2，…，λ_n，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$. 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,\cdots,n$. 又 $\boldsymbol{\xi}_i$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，故有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}_i=\mu_i\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,\cdots,n$. 从而有 $\boldsymbol{BA}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\mu_i\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{AB}\boldsymbol{\xi}_i=\mu_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\mu_i\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$. 从而，$(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{O}$，$i=1,2,\cdots,n$，于是 $(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)=\boldsymbol{O}$，由 $\boldsymbol{\xi}_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 线性无关，得 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$ 可逆，于是 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)^{-1}=\boldsymbol{O}$，故有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且与 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似.

证明　由题意 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，因此有 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，所以 $\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\cdot\boldsymbol{B}^{-1}=$

$|B|\cdot(P^{-1}A^{-1}P)=P^{-1}(|B|\cdot A^{-1})P=P^{-1}(|A|\cdot A^{-1})P=P^{-1}A^*P$，因此 A^* 与 B^* 相似.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，试求一个可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 由于 $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，且 A 有 3 个线性无关的特征向量，故 $R(A-2E)=1$. 从而，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ x & 2 & y\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 2-x & y+x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知，$x=2$，$y=-2$，再由 $1+4+5=2+2+\lambda_3$，得 $\lambda_3=6$.

当 $\lambda=2$ 时，解方程组 $(A-2E)x=0$，得到基础解系为 $\alpha_1=(-1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,\ 1)^T$.

当 $\lambda=6$ 时，解方程组 $(A-6E)x=0$，得到基础解系为 $\alpha_3=(1,-2,\ 3)^T$.

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

6. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $f(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，A 为实对称矩阵，相应于特征值 2 的特征向量为 $\alpha=(1,\ 1,\ -1)^T$，求矩阵 A 及所用的正交变换 $x=Py$.

解 由已知条件得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$. 设 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 β，则有 $\alpha^T\beta=0$. 即 β 是方程 $\alpha^Tx=0$ 的解向量. 解方程 $\alpha^Tx=0$，得基础解系为 $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，将 β_1，β_2 正交化，得 $\gamma_1=\beta_1=(-1,\ 1,\ 0)^T$，$\gamma_2=\beta_2-\dfrac{(\beta_2,\ \gamma_1)}{(\gamma_1,\ \gamma_1)}\gamma_1=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)^T$. 再将 γ_1，γ_2，α 单位化，得

$$p_1=\frac{1}{\|\gamma_1\|}\cdot\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^T,\ p_2=\frac{1}{\|\gamma_2\|}\cdot\gamma_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T,$$

$$p_3=\frac{1}{\|\alpha\|}\cdot\alpha=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}，令 P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则

$$A=P\Lambda P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

所用的正交变换为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$.

7. 求一个正交变换$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$，将二次曲面方程 $x^2+3y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=4$ 化为标准形方程，并问该二次曲面是什么类型的曲面.

解　记 $f(x,\ y,\ z)=x^2+3y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$，则该二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-4).$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

当 $\lambda=0$ 时，解方程 $Ax=0$，得基础解系为 $\xi_1=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$，得基础解系为 $\xi_2=(1,\ -1,\ 1)^T$.

当 $\lambda=4$ 时，解方程 $(A-4E)x=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,\ 2,\ 1)^T$.

单位化，得 $p_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，$p_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，$p_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$.

令

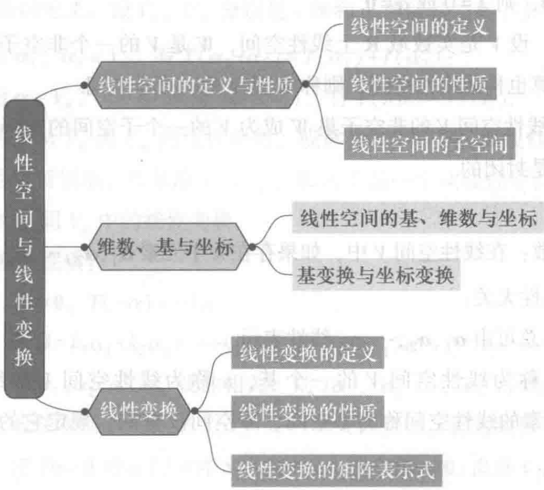
$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则正交变换 $x=Py$ 将二次型化为标准形 $f=0\cdot u^2+1\cdot v^2+4\cdot w^2$，即 $f=v^2+4w^2$.

因而方程为 $v^2+4w^2=4$ 表示椭圆柱面.

第五章　线性空间与线性变换

一、知识结构



线性空间与线性变换

二、归纳总结

1. 线性空间的定义与性质

线性空间的定义：设 V 是一个非空集合，$\mathbf{R}$ 为实数域. 对于任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$，在 V 中总有唯一确定的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 对于 $\mathbf{R}$ 中任一数 λ 与 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$，在 V 中总有唯一确定的一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与之对应，称为 λ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，记作 $\boldsymbol{\delta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 如果这两种运算满足以下 8 条运算规律(设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}\in V$；λ，$\mu\in\mathbf{R}$)：

(1)加法交换律　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2)加法结合律　$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3)在 V 中存在零元素 $\mathbf{0}$，对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有是 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4)对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$；

(5)$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6)$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$.

那么，V 就称为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

线性空间的性质如下.

性质 1 零元素是唯一的.

性质 2 任一元素的负元素是唯一的(以后将 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素记作 $-\boldsymbol{\alpha}$).

性质 3 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$；$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

性质 4 如果 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

线性空间的子空间：设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间，W 是 V 的一个非空子集. 如果 W 关于 V 的加法和数乘运算也构成线性空间，则称 W 是 V 的一个子空间.

定理 实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V 的非空子集 W 成为 V 的一个子空间的充分必要条件是 W 关于 V 的加法和数乘是封闭的.

2. 维数、基与坐标

线性空间的基与维数：在线性空间 V 中，如果存在 n 个元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

那么，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就称为线性空间 V 的一个基，n 称为线性空间 V 的维数，记作 $\dim V=n$. 只含一个零元素的线性空间称为零空间，零空间没有基，规定它的维数为 0. n 维线性空间 V 也记作 V_n.

向量在基下的坐标：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V_n 的一个基，对于任一元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，总有且仅有一组有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这组有序数就称为元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标，并记作 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

基变换公式与过渡矩阵：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_n 中的两个基，且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P},$$

则上式称为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的基变换公式，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵. 由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

定理 设线性空间 V_n 中取定两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，V_n 中的线性变换 T 在这两个基下的矩阵依次为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

坐标变换公式：设 V_n 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，在

基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，且由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为矩阵$\boldsymbol{P}$，于是有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

3. 线性变换

线性变换的定义：设V_n，U_m分别是n维和m维线性空间，如果映射T：$V_n\to U_m$满足

(1)任给$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in V_n$，有$T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=T(\boldsymbol{\alpha}_1)+T(\boldsymbol{\alpha}_2)$；

(2)任给$\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，$\lambda\in\mathbf{R}$(从而$\lambda\alpha\in V_n$)，有$T(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda T(\boldsymbol{\alpha})$.

那么，T就称为从V_n到U_m的线性映射，或称为线性变换. 即线性映射就是保持线性组合的对应的映射. 特别地，如果取$V_n=U_m$，那么T是一个从线性空间V_n到其自身的线性映射，称为线性空间V_n中的线性变换.

线性变换的性质：

性质1 $T\mathbf{0}=\mathbf{0}$，$T(-\boldsymbol{\alpha})=-T\boldsymbol{\alpha}$；

性质2 若$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则$T\boldsymbol{\beta}=k_1T\boldsymbol{\alpha}_1+k_2T\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_mT\boldsymbol{\alpha}_m$；

性质3 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则$T\boldsymbol{\alpha}_1,T\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,T\boldsymbol{\alpha}_m$亦线性相关；

性质4 线性变换T的像集$T(V_n)$是一个线性空间，称为线性变换T的像空间；

性质5 使$T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$的$\boldsymbol{\alpha}$的全体$S_T=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_n,\ T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\}$也是$V_n$的一个线性子空间，称$S_T$为线性变换$T$的核.

线性变换的矩阵表示：设线性空间V_n的一个基为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$T$是$V_n$中的线性变换，则

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha}_n))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

矩阵$\boldsymbol{A}$称为线性变换T在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵.

定理1 设线性变换T在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵是$\boldsymbol{A}$，向量$\boldsymbol{\alpha}$与$T(\boldsymbol{\alpha})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标分别为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，则有$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

按坐标表示，有$T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A\alpha}$.

定理2 设线性空间V_n中取定两个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，$V_n$中的线性变换$T$在这两个基下的矩阵依次为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，那么$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

三、典型例题

例 1 设 n 次多项式的全体构成的集合为

$$Q[x]_n=\{p=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_1,\ a_0\in\mathbf{R},\ a_n\neq 0\}.$$

对于通常的多项式加法和乘数运算，判断 $Q[x]_n$ 是否构成向量空间.

解 对于通常的多项式加法和乘数运算，$Q[x]_n$ 不构成向量空间. 这是因为，$0\cdot p=0\cdot x^n+0\cdot x^{n-1}+\cdots+0\cdot x+0=0\notin Q[x]_n$，即 $Q[x]_n$ 对运算不封闭.

例 2 验证函数集合 $V=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathbf{e}^x \mid a_2,\ a_1,\ a_0\in\mathbf{R}^3\}$ 对于函数的线性运算构成线性空间.

解 因为函数的线性运算满足线性空间定义中的 8 条运算规律，所以只需验证集合 V 对函数的线性是否封闭.

对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathbf{e}^x\in V$，$\boldsymbol{\beta}=(b_2x^2+b_1x+b_0)\mathbf{e}^x\in V$，$k\in\mathbf{R}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathbf{e}^x+(b_2x^2+b_1x+b_0)\mathbf{e}^x\\&=[(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)]\mathbf{e}^x,\end{aligned}$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_2x^2+ka_1x+ka_0)\mathbf{e}^x,$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$，$k\boldsymbol{\alpha}\in V$，故集合 V 对于函数的线性运算构成向量空间.

例 3 在线性空间 $P[x]_n$ 上定义映射 T 如下：对任意 $f(x)\in P[x]_n$，$T(f(x))=xf'(x)$. 验证 T 是 $P[x]_n$ 上的线性变换.

微课视频

证明 对任意 $f(x)$，$g(x)\in P[x]_n$，以及任意实数 $\lambda\in\mathbf{R}$，

$$\begin{aligned}T(f(x)+g(x))&=x[f(x)+g(x)]'=x[f'(x)+g'(x)]\\&=xf'(x)+xg'(x)=T(f(x))+T(g(x)),\end{aligned}$$

$$T(\lambda f(x))=x[\lambda f(x)]'=x[\lambda f'(x)]=\lambda[xf'(x)]=\lambda T(f(x)),$$

所以映射 T 是 $P[x]_n$ 上的线性变换.

例 4 在线性空间 $M_n(\mathbf{R})$ 上定义映射 T 如下：对任意 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbf{R})$，$T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 验证 T 是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的线性变换.

证明 对任意 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbf{R})$，以及任意实数 $\lambda\in\mathbf{R}$，

$$T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=T(\boldsymbol{A})+T(\boldsymbol{B}),$$

$$T(\lambda\boldsymbol{A})=(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda T(\boldsymbol{A}),$$

所以映射 T 是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的线性变换.

例 5 在线性空间 $M_2(\mathbf{R})$ 中，定义线性变换 T_1 为 $T_1(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$，$\forall\,\boldsymbol{X}\in M_2(\mathbf{R})$，其中矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ 是一个固定的矩阵. 求线性变换 T_1 在基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{12}=$

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵.

微课视频

解 $T_1(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}$

$$=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\ \boldsymbol{E}_{12},\ \boldsymbol{E}_{21},\ \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}a\\0\\c\\0\end{pmatrix},$$

$$T_1(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\ \boldsymbol{E}_{12},\ \boldsymbol{E}_{21},\ \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}0\\a\\0\\c\end{pmatrix},$$

$$T_1(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\ \boldsymbol{E}_{12},\ \boldsymbol{E}_{21},\ \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\end{pmatrix},$$

$$T_1(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\ \boldsymbol{E}_{12},\ \boldsymbol{E}_{21},\ \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}0\\b\\0\\d\end{pmatrix},$$

所以 T_1 在基 $\boldsymbol{E}_{11}$，$\boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{E}_{21}$，$\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵为

$$T_1(\boldsymbol{E}_{11},\ \boldsymbol{E}_{12},\ \boldsymbol{E}_{21},\ \boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\ \boldsymbol{E}_{12},\ \boldsymbol{E}_{21},\ \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}.$$

例 6 在线性空间 $M_2(\mathbf{R})$ 中，定义线性变换 T_2 为 $T_2(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\forall \boldsymbol{X}\in M_2(\mathbf{R})$，其中矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ 是一个固定的矩阵. 求线性变换 T_2 在基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$下的矩阵.

解

$$T_2(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}a\\ b\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$T_2(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}c\\ d\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$T_2(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & b\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}0\\ 0\\ a\\ b\end{pmatrix},$$

$$T_2(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & d\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}0\\ 0\\ c\\ d\end{pmatrix},$$

所以 T_2 在基 $\boldsymbol{E}_{11}$，$\boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{E}_{21}$，$\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵为

$$T_2(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}a & c & 0 & 0\\ b & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & c\\ 0 & 0 & b & d\end{pmatrix}.$$

例 7　在线性空间 $P[x]_3$ 中定义线性变换 T 为 $T(f(x))=f(x+1)-f(x)$，$\forall f(x)\in P[x]_3$，求线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=1$，$\boldsymbol{\alpha}_2=x$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{1}{2}x(x-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\dfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1)=1-1=0=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_2)=(x+1)-x=1=1\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_3)=\frac{1}{2}(x+1)x-\frac{1}{2}x(x-1)=x=0\boldsymbol{\alpha}_1+1\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}_4)=\frac{1}{6}(x+1)x(x-1)-\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)=\frac{1}{2}x(x-1)$$

$$=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+1\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

于是

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

例 8　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个基，线性变换 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&-3&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$，求 T 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵.

解 由题设得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix},$$

微课视频

即从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$.

设 T 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2\\1&-3&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-10&5\\11&12&-3\\8&16&-8\end{pmatrix}.$$

例 9 设 T 是 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换，它把基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 变换为基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，试求：(1) T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵；(2) $\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

微课视频

解 (1) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，即 $T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$，又由题设知，$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，于是 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$. 从而

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，并设从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，即 $(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，于是

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

从而

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}.$$

例 10　设 A 为已知的 $m\times n$ 矩阵，$V=\{Ax \mid x\in\mathbf{R}^n\}$.

(1)验证 V 对通常的矩阵加法和乘数运算构成线性空间；

(2)当 $A=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}$ 时，求 V 的一个基.

微课视频

解　(1)对任意 $\alpha,\beta\in V$，存在向量 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$，使得 $\alpha=Ax_1$，$\beta=Ax_2$. 于是 $\alpha+\beta=Ax_1+Ax_2=A(x_1+x_2)$，$x_1+x_2\in\mathbf{R}^n$，所以 $\alpha+\beta\in V$.

对任意常数 $k\in\mathbf{R}$，$k\alpha=k(Ax_1)=A(kx_1)$，$kx_1\in\mathbf{R}^n$，所以 $k\alpha\in V$，因此 V 对通常的矩阵加法和乘数运算构成线性空间.

(2)当 $A=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}$ 时，将 A 列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则

$$V=\{Ax \mid x\in\mathbf{R}^4\}=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4 \mid x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^4\},$$

即 V 是由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 生成的向量空间，所以要求 V 的一个基，只需求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组即可. 由

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&5&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

四、习题详解

习题 5-1　线性空间的定义与性质

1. 验证下列集合对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间：

(1)主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_1；

(2)3 阶对称矩阵的全体 S_2；

(3)3 阶反对称矩阵的全体 S_3.

解 由于矩阵的加法和乘数运算是线性运算，所以只需验证 S_1，S_2，S_3 是否对给定的运算封闭即可.

（1）

$$S_1=\left\{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\middle|\, a_{11}+a_{22}=0\right\},$$

对任意

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\in S_1,$$

以及任意 $k\in\mathbf{R}$，

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix},\ kA=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}\\ka_{21}&ka_{22}\end{pmatrix}.$$

因为 $a_{11}+a_{22}=0$，$b_{11}+b_{22}=0$，所以 $(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=(a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22})=0$，$(ka_{11})+(ka_{22})=k(a_{11}+a_{22})=0$，从而

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\in S_1,\ kA=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}\\ka_{21}&ka_{22}\end{pmatrix}\in S_1,$$

因此 S_1 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

（2）

$$S_2=\left\{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\middle|\, a_{12}=a_{21},\ a_{13}=a_{31},\ a_{23}=a_{32}\right\},$$

对任意

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\in S_2,$$

以及任意 $k\in\mathbf{R}$，

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&a_{33}+b_{33}\end{pmatrix},\ kA=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&ka_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\ka_{31}&ka_{32}&ka_{33}\end{pmatrix}.$$

因为 $a_{12}=a_{21}$，$a_{13}=a_{31}$，$a_{23}=a_{32}$，$b_{12}=b_{21}$，$b_{13}=b_{31}$，$b_{23}=b_{32}$，所以 $a_{12}+b_{12}=a_{21}+b_{21}$，$a_{13}+b_{13}=a_{31}+b_{31}$，$a_{23}+b_{23}=a_{32}+b_{32}$，$ka_{12}=ka_{21}$，$ka_{13}=ka_{31}$，$ka_{23}=ka_{32}$，从而

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \in S_2,\ kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} \in S_2,$$

因此 S_2 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

(3)

$$S_3=\left\{ A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \middle|\ a_{12}=-a_{21},\ a_{13}=-a_{31},\ a_{23}=-a_{32} \right\},$$

对任意

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \in S_3,$$

以及任意 $k \in \mathbf{R}$,

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & 0 & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & 0 \end{pmatrix},\ kA=\begin{pmatrix} 0 & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & 0 & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $a_{12}=-a_{21}$, $a_{13}=-a_{31}$, $a_{23}=-a_{32}$, $b_{12}=-b_{21}$, $b_{13}=-b_{31}$, $b_{23}=-b_{32}$, 所以 $a_{12}+b_{12}=-(a_{21}+b_{21})$, $a_{13}+b_{13}=-(a_{31}+b_{31})$, $a_{23}+b_{23}=-(a_{32}+b_{32})$, $ka_{12}=-ka_{21}$, $ka_{13}=-ka_{31}$, $ka_{23}=-ka_{32}$, 从而

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & 0 & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & 0 \end{pmatrix} \in S_3,\ kA=\begin{pmatrix} 0 & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & 0 & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & 0 \end{pmatrix} \in S_3,$$

因此 S_3 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

2. 验证正弦函数的集合

$$S[x]=\{s=A\sin(x+B) \mid A,\ B \in \mathbf{R}\}$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间.

解 由于函数的加法及数乘函数的乘法运算是线性运算, 显然满足线性运算的规律, 所以只需验证集合 $S[x]$ 对通常的函数的加法及数乘函数的乘法运算是否封闭即可.

对任意 $S_1=A_1\sin(x+B_1)$, $S_2=A_2\sin(x+B_2) \in S[x]$, 及任意常数 $k \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &= A_1\sin(x+B_1)+A_2\sin(x+B_2) \\ &= A_1(\sin x\cos B_1+\cos x\sin B_1)+A_2(\sin x\cos B_2+\cos x\sin B_2) \\ &= \sin x(A_1\cos B_1+A_2\cos B_2)+\cos x(A_1\sin B_1+A_2\sin B_2). \end{aligned}$$

记 $C_1=A_1\cos B_1+A_2\cos B_2$，$C_2=A_1\sin B_1+A_2\sin B_2$，则

$$
\begin{aligned}
S_1+S_2&=C_1\sin x+C_2\cos x\\
&=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin x+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos x\right)\\
&=\sqrt{C_1^2+C_2^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\left(\tan\theta=\frac{C_2}{C_1}\right)\\
&=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\sin(x+\theta)\in S[x],
\end{aligned}
$$

$$kS_1=kA_1\sin(x+B_1)=(kA_1)\sin(x+B_1)\in S[x].$$

所以 $S[x]$ 对通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间.

3. 验证：与向量 $(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm T}$ 不平行的全体 3 维数组向量，对于数组向量的加法和数乘运算不构成线性空间.

证明 记

$$V=\left\{\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\ x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbf{R},\ 且\ \boldsymbol{\alpha}\ 与\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}不平行\right\},$$

取

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\in V,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\notin V,$$

故 V 不构成线性空间.

4. 设集合 $V=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in\mathbf{R}\}$，在 V 上定义加法和数乘运算为

$$(a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2),\ k\cdot(a,\ b)=\left(ka,\ kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right),$$

则集合 V 关于规定的运算是否能构成实数域上的线性空间?

解 (1) $(a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)=(a_2+a_1,\ b_2+b_1+a_2a_1)=(a_2,\ b_2)\oplus(a_1,\ b_1)$；

(2)
$$
\begin{aligned}
&[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]\oplus(a_3,b_3)\\
&=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,b_3)\\
&=((a_1+a_2)+a_3,\ (b_1+b_2+a_1a_2)+b_3+(a_1+a_2)a_3)\\
&=(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+a_1a_2+b_3+a_1a_3+a_2a_3)\\
&=(a_1+(a_2+a_3),\ b_1+(b_2+b_3+a_2a_3)+a_1(a_2+a_3))\\
&=(a_1,\ b_1)\oplus(a_2+a_3,\ b_2+b_3+a_2a_3)
\end{aligned}
$$

$=(a_1, b_1)\oplus[(a_2, b_2)\oplus(a_3, b_3)]$；

(3) $\forall(a_1, b_1)\in V$，$(a_1, b_1)\oplus(0, 0)=(a_1+0, b_1+0+a_1\cdot 0)=(a_1, b_1)$，即 V 中存在零元素 $(0, 0)$；

(4) $\forall(a_1, b_1)\in V$，由于

$$(a_1, b_1)\oplus(-a_1, a_1^2-b_1)=(a_1-a_1, b_1+a_1^2-b_1+a_1(-a_1))=(0, 0),$$

所以 (a_1, b_1) 在 V 中有负元 $(-a_1, a_1^2-b_1)$；

(5) $1\cdot(a_1, b_1)=\left(1\cdot a_1, 1\cdot b_1+\dfrac{1\cdot(1-1)}{2}a_1^2\right)=(a_1, b_1)$；

$$\begin{aligned}(6)\ \lambda\cdot(\mu\cdot(a_1, b_1))&=\lambda\cdot\left(\mu a_1, \mu b_1+\frac{\mu(\mu-1)}{2}a_1^2\right)\\&=\left(\lambda\mu a_1, \lambda\left(\mu b_1+\frac{\mu(\mu-1)}{2}a_1^2\right)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}(\mu a_1)^2\right)\\&=\left(\lambda\mu a_1, \lambda\mu b_1+\frac{\lambda\mu(\lambda\mu-1)}{2}a_1^2\right)\\&=(\lambda\mu)\cdot(a_1, b_1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7)\ (\lambda+\mu)\cdot(a_1, b_1)&=\left((\lambda+\mu)a_1, (\lambda+\mu)b_1+\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)}{2}a_1^2\right)\\&=\left(\lambda a_1+\mu a_1, \lambda b_1+\mu b_1+\frac{\lambda(\lambda-1)+\mu(\mu-1)}{2}a_1^2+\lambda\mu a_1^2\right)\\&=\left(\lambda a_1+\mu a_1, \lambda b_1+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}a_1^2+\mu b_1+\frac{\mu(\mu-1)}{2}a_1^2+\lambda a_1\cdot\mu a_1\right)\\&=\left(\lambda a_1, \lambda b_1+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(\mu a_1, \mu b_1+\frac{\mu(\mu-1)}{2}a_1^2\right)\\&=\lambda\cdot(a_1, b_1)\oplus\mu\cdot(a_1, b_1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\ &\lambda\cdot[(a_1, b_1)\oplus(a_2, b_2)]=\lambda\cdot(a_1+a_2, b_1+b_2+a_1a_2)\\&=\left(\lambda(a_1+a_2), \lambda(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}(a_1+a_2)^2\right)\\&=\left(\lambda a_1+\lambda a_2, \lambda b_1+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}a_1^2+\lambda b_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}a_2^2+\lambda^2a_1a_2\right)\\&=\left(\lambda a_1, \lambda b_1+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(\lambda a_2, \lambda b_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}a_2^2\right)\\&=\lambda\cdot(a_1, b_1)\oplus\lambda\cdot(a_2, b_2).\end{aligned}$$

所以集合 V 关于规定的运算构成线性空间.

5. 设 V 是实数域上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 是 V 中一组向量，集合

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t \mid k_1, k_2, \cdots, k_t\in\mathbf{R}\},$$

证明 W 是 V 的一个子空间.

证明 取 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$，$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$，$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t$，$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=(kk_1+ll_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(kk_t+ll_t)\boldsymbol{\alpha}_t \in W$，故 W 是 V 的一个子空间.

习题 5-2 维数、基与坐标

1. 在 $\mathbf{R}^3$ 中求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3, 7, 1)^{\mathrm{T}}$ 在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 3, 5)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(6, 3, 2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标.

解 对 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha})$ 作如下初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}=33\boldsymbol{\alpha}_1-82\boldsymbol{\alpha}_2+154\boldsymbol{\alpha}_3.$$

2. 求习题 5-1 第 1 题中 3 个线性空间 S_1、S_2、S_3 的基.

解 习题 5-1 第 1 题中线性空间

$$S_1=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \middle| a_{11},\ a_{12},\ a_{21} \in \mathbf{R}\right\},$$

对任意

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in S_1,\ \boldsymbol{A}=a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即 S_1 中任一元素都可由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

线性表示. 显然，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_1,$$

当且仅当 $k_1=k_2=k_3=0$，有

$$k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，所以可以作为 S_1 的基.

$$S_2=\left\{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\middle|\,a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{33}\in\mathbf{R}\right\},$$

对任意

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\in S_2,$$

$$A=a_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+a_{33}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

即 S_2 中任一元素都可由

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

线性表示. 显然，这 6 个矩阵都是 S_2 中的元素，且线性无关，所以可以作为 S_2 的基.

$$S_3=\left\{A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\-a_{21}&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{pmatrix}\middle|\,a_{12},\ a_{13},\ a_{23}\in\mathbf{R}\right\},$$

对任意

$$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\-a_{12}&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{pmatrix}\in S_3,$$

$$A=a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

即 S_3 中任一元素都可由

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

线性表示. 显然，这 3 个矩阵都是 S_3 中的元素，且线性无关，所以可以作为 S_3 的基.

3. 在 $\mathbf{R}^4$ 中取两个基

Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，

Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(1)求由基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(2)向量在基Ⅰ下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\19\\0\\1\end{pmatrix}$，求该向量在基Ⅱ下的坐标.

解 (1)令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$，设由基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$，故

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{16}{13} & 1 & 1 & 1\\ \dfrac{19}{13} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{20}{13} & 1 & 0 & 1\\ -\dfrac{9}{13} & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2)设向量在基Ⅱ下的坐标为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\19\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\19\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-23\\5\\3\end{pmatrix}.$$

4. 在线性空间 $P[x]_3$ 中取两个基

$$\text{Ⅰ}：1,\ x,\ x^2,\ x^3 \text{ 和 Ⅱ}：1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3.$$

(1)求从基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(2)已知 $f(x)\in P[x]_3$ 在基Ⅰ下的坐标为$(1,0,-2,5)^{\mathrm{T}}$，$g(x)\in P[x]_3$ 在基Ⅱ下的坐标为$(7,0,8,2)^{\mathrm{T}}$，求 $f(x)+g(x)$ 分别在基Ⅰ和基Ⅱ下的坐标.

解 (1)$(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)=(1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

故

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2)由于$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,故

$$f(x)=(1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}=(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$=(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)\begin{pmatrix}1\\2\\-7\\5\end{pmatrix},$$

$$g(x)=(1, x, x^2, x^3)P\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}=(1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix}17\\10\\10\\2\end{pmatrix}.$$

$f(x)+g(x)$的基Ⅰ的坐标为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}17\\10\\10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\10\\8\\7\end{pmatrix}.$$

在基Ⅱ下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-7\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\0\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\1\\7\end{pmatrix}.$$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，是线性空间 V_n 的一个基，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 V_n 的一个基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，到基 $2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

证明

$$(2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\2&0&\cdots&0&0\\0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n&0\end{pmatrix},$$

由 $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\2&0&\cdots&0&0\\0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n&0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot n!\neq0$ 可知，矩阵 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\2&0&\cdots&0&0\\0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$ 可逆，

于是 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)\cdot\boldsymbol{K}^{-1}$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 等价，从而 $2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 V_n 的一个基，并且过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\2&0&\cdots&0&0\\0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n&0\end{pmatrix}.$$

习题 5-3　线性变换

1. 说明 xOy 平面上变换 $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的几何意义，其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$.

解　(1)
$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix},$$

变换 T 将 xOy 平面上的任一向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 变换成关于 y 轴对称的向量 $\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$.

（2）
$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},$$

变换 T 将 xOy 平面上的任一向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$变换成该向量在 x 轴上的投影向量$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$.

（3）
$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix},$$

变换 T 将 xOy 平面上的任一向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$变换成关于直线 $y=x$ 对称的向量$\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$.

（4）
$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix},$$

变换 T 将 xOy 平面上的任一向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$变换成关于直线 $y=-x$ 对称的向量$\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上全体 n 阶方阵所成的线性空间，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 是一个固定的矩阵. 对任意 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，定义 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 上的映射 T 为

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA},$$

验证 T 是 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 上的线性变换.

证明 经验证 $\forall \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，

$$T(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{AY}-\boldsymbol{XA}-\boldsymbol{XY}=(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA})+(\boldsymbol{AY}-\boldsymbol{YA})=T(\boldsymbol{X})+T(\boldsymbol{Y}),$$

$$T(\lambda\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{X})-(\lambda\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}=\lambda(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA})=\lambda T(\boldsymbol{X}),$$

故 T 是 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ 上的线性变换.

3. 函数集合

$$V_3=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_0+a_1x+a_2x^2)\mathrm{e}^x \mid a_0,\ a_1,\ a_2\in\mathbf{R}\}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathrm{e}^x$，$\boldsymbol{\alpha}_2=x\mathrm{e}^x$，$\boldsymbol{\alpha}_3=x^2\mathrm{e}^x$，求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解 $D(\mathrm{e}^x,\ x\mathrm{e}^x,\ x^2\mathrm{e}^x)=(\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x,\ 2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x)=(\mathrm{e}^x,\ x\mathrm{e}^x,\ x^2\mathrm{e}^x)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$,

故 D 在这个基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

4. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix},$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$，由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\0&0&1&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&2&3&4\end{pmatrix},$$

得过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\2&3&4\end{pmatrix}.$$

5. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基分别为

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$\mathbf{R}^3$ 上线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求线性变换 T 在基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵.

解 设由基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{P},$$

于是 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，线性变换 T 在基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，从而

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

测试题五

一、选择题

设 f 为有限维线性空间 V 上的线性变换，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 f 在 V 的不同基下的矩阵，则下列说法不正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值

B. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式

C. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

D. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似

解　由于 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为线性变换 f 在 V 的不同基下的矩阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，从而有相同的特征值和行列式，但是不一定有相同的特征向量，故选 C.

二、填空题

1. 已知 b 为常数，且向量组 $\boldsymbol{V}=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_1+a_2+b\end{pmatrix}，其中\ a_1,\ a_2,\ b\in\mathbf{R}\right\}$可以构成一个向量空间，则参数 $b=$________.

解　要使向量组 $\boldsymbol{V}$ 构成一个向量空间，对任意 $k\in\mathbf{R}$，必有

$$k\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_1+ka_2+kb\end{pmatrix}\in\boldsymbol{V},$$

故 $kb=b$，k 任意，得 $b=0$.

2. 设向量 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 下有相同的坐标，则 $\boldsymbol{\eta}=$__________.

解 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3,$$

即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_3)=\mathbf{0},$$

由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ k\in\mathbf{R},$$

从而

$$\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ k\in\mathbf{R}.$$

三、解答题

1. 在次数不超过 3 的实系数多项式所成的线性空间 $V=P[x]_3$ 中定义线性变换 T 为：对任意的 $f(x)\in V$，$T(f(x))=f(x)-f(x+1)$，求线性变换 T 在基 $P_1=1$，$P_2=x$，$P_3=x^2$，$P_4=x^3$ 下的矩阵.

解 由于 $T(1)=1-1=0$，$T(x)=x-(x+1)=-1$，$T(x^2)=x^2-(x+1)^2=-2x-1$，$T(x^3)=x^3-(x+1)^3=-3x^2-3x-1$，从而

$$T(1,\ x,\ x^2,\ x^3)=(0,\ -1,\ -2x-1,\ -3x^2-3x-1)$$

$$=(1,\ x,\ x^2,\ x^3)\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因此线性变换 T 在基 P_1,P_2,P_3,P_4 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. 设非空集合

$$V=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R},\ A^{\mathrm{T}}=A\}$$

对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，P 为可逆矩阵. 在 V 中定义映射 T 如下：对任意 $A=(a_{ij})\in V$，$T(A)=P^{\mathrm{T}}AP$，其中 P^{T} 为 P 的转置矩阵.

(1) 验证 T 是 V 上的线性变换；

(2) 当 $n=2$，求 T 在 V 的基 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 下的矩阵，其中 $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

证明 (1) $\forall A,\ B\in V$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，

$T(A+B)=P^{\mathrm{T}}(A+B)P=P^{\mathrm{T}}AP+P^{\mathrm{T}}BP=T(A)+T(B)$，$T(\lambda A)=P^{\mathrm{T}}(\lambda A)P=\lambda(P^{\mathrm{T}}AP)=\lambda T(A)$.

故 T 是 V 上的线性变换.

(2) $$T(A_1)=P^{\mathrm{T}}A_1P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=A_1+A_2+A_3,$$

$$T(A_2)=P^{\mathrm{T}}A_2P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=A_1+A_2-A_3,$$

$$T(A_3)=P^{\mathrm{T}}A_3P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}=-2A_1+2A,$$

所以

$$T(A_1,\ A_2,\ A_3)=(A_1,\ A_2,\ A_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

即 T 在 V 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

3. 设由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\\-7\end{pmatrix}$ 生成的向量空间为 V，求空间 V 的维数及它的一组基，并用基表示出其余向量.

解 对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 作初等行变换，可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_2\\r_3+r_2\\r_4+2r_2}]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V 的一组基，$\dim(V)=2$，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_5=-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2.$$

$$V=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2 \mid k_1,\ k_2\in\mathbf{R}\}.$$

4. 设 V 为由全部 2 阶实方阵所构成的线性空间. 对于任意 $\boldsymbol{A}\in V$，定义：$P(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示转置矩阵.

(1)证明：P 为线性变换.

(2)求 P 在基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

证明 (1) $\forall \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in V$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，

$$P(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=P(\boldsymbol{A})+P(\boldsymbol{B}),$$

$$P(\lambda\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}((\lambda\boldsymbol{A})-(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}(\lambda\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\lambda\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\lambda P(\boldsymbol{A}),$$

故 P 是线性变换.

（2）
$$P(\boldsymbol{E}_{11})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{11}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$P(\boldsymbol{E}_{12})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{12}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{12}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{21},$$

$$P(\boldsymbol{E}_{21})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{21}-\boldsymbol{E}_{21}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{12}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{21},$$

$$P(\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{12}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{21},$$

所以

$$P(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{B})\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 P 在基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$